Probabilités

Exercice 1: Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même moyenne m et même variance σ^2.
1) On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.
2) On pose $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$. Calculer l'espérance de S_n^2.

Exercice 2: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs dans le même ensemble dénombrable $E(\subset \mathbb{R})$, toutes de même loi, indépendantes de la variable aléatoire N. On définit la variable aléatoire S par

$$\forall \omega \in \Omega \quad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

Calculer l'espérance de S, en fonction de celle de N et de X_1 qui seront supposées finies.

Exercice 3: Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X possède une espérance finie. Montrer :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

Exercice 4: Le nombre N d'usagers entrant durant une journée dans un bureau de poste fixé suit une loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité pour qu'un tel usager viennent pour expédier un colis est p. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'usagers venus expédier un colis.
1) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.
2) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3) Déterminer la loi de N sachant $X = k$, son espérance et sa variance.

Ex 5: *CCS 15*
30 minutes de préparation avec les fonctions Python a disposition.
1)
   a) Coder une fonction Python S de paramètre n et p renvoyant un tableau de taille n tel que le k-ième élément prenne une valeur aléatoire décrite par la variable $\frac{S_k}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k X_i$ (les X_i sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
   Indication : description de la fonction `random_binomial`.
   b) En déduire une fonction de paramètres n et p qui trace les courbes polygonales passant par les points
   - $(k, \frac{S_k}{k})$ $1 \leq k \leq n$.
   - $(k, p + \sqrt{\frac{\ln k}{k}})$ $1 \leq k \leq n$.
   - $(k, p - \sqrt{\frac{\ln k}{k}})$ $1 \leq k \leq n$.

   Quelle observation peut-on faire ?

2) Soit X une VAD centrée telle que $|X| \leq 1$.
   a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in [-1, 1] \quad \exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1+x)\exp(t) + \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t).$$

   b) Pourquoi $E(\exp(tX))$ existe-t-elle ? Montrer que $E(\exp(tX)) \leq \operatorname{ch} t$.
   c) En déduire $E(\exp(tX)) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$.

3) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des VAD centrées indépendantes et bornées. On note $c_j = \|X_j\|_\infty$ et on pose $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.
   a) Montrer que

$$E(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^n c_j^2\right)$$

b) En utilisant l'inégalité de Markov montrer que :

$$\forall t > 0\ \forall \epsilon > 0 \quad P(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(-\epsilon t + \frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right).$$

c) En déduire

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right).$$

Exercice 6: *Mines MP*
Soit σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n. Soit j dans $\{1, \dots, n\}$. On dit que la permutation bat un record en j si $\sigma(j) > \sigma(i)$ pour tout $i < j$. Déterminer la probabilité de l'évènement « σ bat un record en j ».

Exercice 7: *Mines MP*

1) Pour s dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $]-1, 1[$, calculer $\displaystyle\sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} x^{n-s}$.
2) On dispose d'une urne remplie de boules blanches et rouges. On procède à une infinité de tirages indépendants avec remise. On tire une boule blanche avec la probabilité p. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire donnant le temps d'appartition , fini ou infini, de la k-ième boule blanche. Donner la loi de X, sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

Exercice 8: *X PC*
Soit $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $a + b = 1$.
1) Montrer que la série de terme général $\displaystyle\binom{2n}{n} a^n b^n$ diverge si et seulement si $a = b = \frac{1}{2}$.
On se place sur l'axe $\mathbb{Z}$ initialement en 0. On a une probabilité a d'aller à droite, b d'aller à gauche à chaque instant. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note r_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité d'être pour la première fois de retour en 0 à l'instant n. On pose $R : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$ et $P : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n$.
2) Montrer que P et R sont définies sur $]-1, 1[$.
3) Montrer que pour $t \in]-1, 1[$ $R(t) = 1 + R(t)P(t)$.
4) Montrer que la probabilité de retour à l'origine est égale à 1 si et seulement si $a = b$.

Exercice 9: *X PSI*
Soit $\theta \in \mathbb{R}^{*+}$ un paramètre. Des individus numérotés $1, 2, \dots$ arrivent successivement dans un restaurant qui abrite une infinité de tables infiniment longues. Les convives s'installent aux différentes tables avec les conditions suivantes : lorsque le $(k+1)^e$ individu se présente , $k \geq 1$, il choisit au hasard l'un des k individus déjà attablés avec la probabilité $\frac{1}{k+\theta}$ et s'assied à la même table, ou occupe une nouvelle table avec la probabilité $\frac{\theta}{k+\theta}$. On note K_n la variable aléatoire indiquant le nombre de tables occupées lorsque n individus ont pris place.
1) Déterminer $\mathbb{P}(K_n = 1)$.
2) Soit G_n la fonction génératrice de K_n. Montrer que $G_n(x) = \dfrac{L_n(\theta x)}{L_n(\theta)}$, où $L_n(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$.
3) Calculer $E(K_n)$ et $V(K_n)$. Donner des équivalents de $E(K_n)$ et $V(K_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
4) Etudier alors le comportement de la suite $\left(\frac{K_n}{\ln n}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 10: *X MP*
On joue à pile ou face. On note e_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un nombre pair de piles dans les n premiers lancers, 0 sinon.
1) Montrer qu'il existe un $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$: $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{e_1 + \cdots + e_n}{n} - \ell\right| > \epsilon\right) \to_{n\to+\infty} 0$.
2) Montrer qu'il existe un $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$: $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{e_1 e_2 + \cdots + e_{n-1}e_n}{n} - \ell'\right| > \epsilon\right) \to_{n\to+\infty} 0$.