Probabilités

Exercice 1:
1) Soit Ω un ensemble quelconque contenant un ensemble dénombrable Ω_1. Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega_1}$ est une famille sommable de réels positifs dont la somme est 1 alors

$$\begin{array}{cccc} P & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & & A & \mapsto & \sum_{\omega\in A\cap\Omega_1} p_\omega \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$.
2) En déduire une probabilité sur $([0,1],\mathcal{P}([0,1])$ telle que pour tout intervalle I non vide et non réduit à un point $P(I)>0$.

Exercice 2: La probabilité qu'un étudiant de classe préparatoire connaissant son cours réussisse le concours x est p, la probabilité qu'un étudiant ne connaissant pas son cours réussisse le même concours est q. La proportion d'étudiants connaissant leur cours est r. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant ayant réussi le concours x connaisse son cours ?

Exercice 3: Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements.
1) Montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right) =^{(\mathrm{def})} \limsup_{n\to+\infty} A_n$$

est dans $\mathcal{A}$.
2) Quelle est l'interprétation de : « $\omega\in\limsup_{n\to+\infty} A_n$ » ?
3) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge alors $P(\limsup A_n)=0$. On suppose maintenant la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ formée d'évènements indépendants.
4) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ diverge alors $P(\limsup A_n)=1$.
Indication : Passer au complémentaire.

Exercice 4: Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ dans $\mathbb{R}^{*+}$ et qu'il existe p dans $[0,1]$ telle que la loi conditionnelle de X sachant $Y=m$ est une loi binomiale de paramètre (m,p). Donner la loi de X.

Exercice 5: Soit A et B deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}(A=i,B=j)=C\frac{e^{-i}}{j^2+3j+2}.$$

1) Déterminer la constante C.
2) Déterminer la loi, l'espérance de A. Les variables A et B sont-elles indépendantes ?
3) Montrer que pour $n>23$, l'évènement $5A+7B=n$ n'est pas négligeable.
4) Généraliser.

Exercice 6: Un panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une par une à chaque étape. On s'arrête lorsqu'il ne reste que des pommes rouges dans le panier (note [1]). Quelle est la probabilité qu'on ait mangé toutes les pommes ?

Exercice 7: Lors d'une élection, 700 électeurs votent pour A et 300 pour B. quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, A soit toujours strictement en tête ?

Exercice 8: Soit I une partie de N. On note $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'entiers indexées par I. Pour une partie X de $\mathbb{N}^{(I))}$ on note $A_I(X)=\{a\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})};\exists x\in X,\forall i\in I\ a_i=x_i\}$, et

$$\mathcal{A}_I=\{A_I(X);X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}^{(I)})\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{A}_I$ est une tribu sur $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$.
2) Etant donné deux parties Iet J de $\mathbb{N}$, montrer $\mathcal{A}_{I\cap J}=\mathcal{A}_I\cap\mathcal{A}_J$.
3) Etant donné deux parties Iet J de $\mathbb{N}$, montrer $\mathcal{A}_{I\cup J}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}_I\cup\mathcal{A}_J$.

1. Essayez dans une soirée, les gens s'arrêteront quand il ne restera plus que des pommes vertes, ou des pistaches fermées.