Réduction des endomorphismes I

Exercice 1: Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$).

Exercice 2: Deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3: Soient u et v des endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Montrer que si $v \circ u = u \circ v$, alors u et v ont un vecteur propre en commun.

Exercice 4: Soit $\mathbb{K}$ un corps et A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On voudrait prouver que

$$\det(XI_n - AB) = \det(XI_n - BA).$$

1) Prouver ce résultat lorsque A est inversible.
Indication : On montrera que les deux matrices sont semblables.
2) Prouver ce $A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Prouver ce résultat dans le cas général.

Exercice 5: Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, $M = (m_{i,j})$.Soit λ une valeur propre de M. On pose, pour $1 \leq i \leq n$: $c_i = \sum_j |m_{i,j}|$, $l_j = \sum_i |m_{i,j}|$.
Montrer qu'il existe un i et un j tels que $|\lambda| \leq c_i$ et $|\lambda| \leq l_j$.

Exercice 6: Valeurs propres de la matrice de $M_n(\mathbb{C})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ y & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ y & \cdots & y & 0 \end{pmatrix}.$$

On commencera par le cas $x = y$, cas ultra-classique. Le cas général se traite par récurrence. Décomposer la première colonne et utiliser la linéarité du déterminant comme fonction de cette colonne.

Exercice 7: Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} & & & & a_1 \\ & & 0 & & a_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 8: Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$, $u \ : E \longrightarrow E$ l'application définie par :

$$f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\ dt \right)$$

Déterminer valeurs et vecteurs propres de u.

Exercice 9: Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. On se donne une partie M de $L(E)$. On suppose que les seuls sous-espaces F tels que $\forall u \in M\ u(F) \subset F$, sont 0 et E. Soit alors $v \in L(E)$ tel que $\forall u \in M\ uov = vou$. Prouver que v est une homothétie. (On pourra admettre que pour tout endomorphisme v de $L(E)$ il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \neq 0$ avec $v(x) = \lambda x$. On introduira alors le plus grand sous-espace F tel que $\forall x \in F\ v(x) = \lambda x$.)

Exercice 10: Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $s \in \mathcal{S}$, on définit $s^* \in \mathcal{S}$ par la relation

$$s_n^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k.$$

1) Montrer que l'application $\varphi :\ s \longrightarrow s^*$ est un automorphisme de $\mathcal{S}$. Déterminer φ^{-1}.
2) Exprimer les valeurs propres d'un automorphisme à l'aide des valeurs propres de son automorphisme réciproque, ainsi que les vecteurs propres associés.
3) En déduire les valeurs propres de φ et les vecteurs propres associés.

Exercice 11: Dans le polycopié les exercices 291, 293, 296, 308, et 348.