Anneaux – Polynômes

Exercice 1: Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$.

Exercice 2: Soit A un anneau.
1) Un élément de A est dit nilpotent s'il existe n entier tel que $x^n = 0$. Montrer que 1-x est inversible.
2) Si x et y sont nilpotents et $xy = yx$, en utilisant la formule du binôme à un ordre judicieusement choisi, montrer que $x + y$ est nilpotent.

Exercice 3: Soit A un anneau, x et y deux éléments de A tels que $xy - yx = 1$. Prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x^n y - y x^n = n x^{n-1}.$$

Donner une relation similaire si $xy - yx = x$.

Exercice 4: Montrer que toute suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

Exercice 5: On appelle idéal maximal d'un anneau A un idéal distinct de A et maximal pour l'inclusion par les idéaux distincts de A.
1) Quels sont les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$?
On fixe maintenant $A = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
2) Montrer que pour tout x_0 de $[a,b]$ $\mathcal{I}_{x_0} = \{f \in A, f(x_0) = 0\}$ est un idéal.
3) $\mathcal{I}_{x_0}$ est-il maximal ?
4) Montrer que tout idéal maximal de A est de la forme $\mathcal{I}_{x_0}$. On pourra utiliser le résultat suivant : si $[a,b]$ est la réunion d'une famille d'intervalles ouverts (sauf à gauche en a et à droite en b) alors il est réunion d'un nombre fini d'intervalles extraits de cette famille. On montrera alors que si un idéal n'est pas de la forme $\mathcal{I}_{x_0}$, il existe un élément de cet idéal qui ne s'annule pas sur $[a,b]$, puis qu'il est égal à A.

Exercice 6: Déterminer le groupe des éléments inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{20\mathbb{Z}}$. Trouver un groupe additif qui lui est isomorphe.

Exercice 7: *(Centrale-Supélec)* Quels sont les sous-anneaux de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Exercice 8: *(Mines-Ponts)* Combien l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{44\mathbb{Z}}$ possède-t-il d'éléments inversibles ?

Exercice 9: Soient S et T des polynômes réels scindés et à racines simples. Montrer que tout polynôme P, combinaison linéaire à coefficients de même signe de $S'T$ et ST' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10: Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{(X-1)^n - (X+1)^n}{(X-1)^n + (X+1)^n}$$

Exercice 11: Soit P un polynôme scindé à racines simples de degré n et

$$F(X) = \frac{(X^2+1)^n}{P(X)^2}.$$

Montrer que les primitives de F sont des fractions rationnelles si et seulement si P vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre.

Exercice 12: On pose pour tout n entier $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que pour tout réel $R > 0$ il existe q dans n tel que pour tout n plus grand que q toute les racines complexes de P sont de module plus grand que R.

Exercice 13: Soient a et b deux réels distincts. Montrer que les polynômes

$$P_k = (X-a)^k (b-X)^{n-k} \text{ pour } 0 \leq k \leq n$$

forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 14: *Le lemme de Gauss*
1) Soient P et Q deux polynômes à coefficients entiers. Soit p un nombre premier. On suppose que p divise tous les coefficients de PQ. Montrer que p divise tous les coefficients de P ou tous les coefficients de Q.
2) Soit $P = QR$ un polynôme à coefficients entiers. On suppose que les coefficients de Q et R sont rationnels. Montrer que l'on peut alors écrire $P = Q_1 R_1$, où R_1 et Q_1 sont à coefficients entiers, et proportionnels à Q et R.

Exercice 15: Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 16: Soit $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$ un polynôme non constant de $\mathbb{Z}[X]$.
1) Montrer que s'il existe un nombre premier p ne divisant pas a_n, divisant tous les autres a_i et tel que p^2 ne divise pas a_0, alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (Critère d'Eisenstein).
2) Montrer que le polynôme $1 + X + \cdots + X^p$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 17: Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$ où les x_i sont distincts et non nuls. Donner une relation entre $P(0)$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)}.$$

Exercice 18:
1) Soit P un polynôme de degré au plus $n-1$ et $r \in]0, +\infty[$ tels que

$$\forall k \in [1, n] \quad P(k) = r^k.$$

Exprimer P en fonction de r et des L_k, où $L_k = \displaystyle\prod_{i=1, i \neq k}^{n} \frac{X-i}{k-i}$.

2) Calculer $P(n+1)$.