Intégration (II)

Exercice 1: Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$.

Exercice 2: Nature de $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

Exercice 3: *Le lemme de Riemann-Lebesgue*
1) Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t)f(t)\,dt = 0$.
2) Enoncer sans démonstration un résultat analogue avec $\cos\lambda t$ et $e^{i\lambda t}$.
3) Montrer que ce résultat reste valable pour une fonction en escalier.
4) En déduire qu'il est aussi valable pour une fonction continue par morceaux.
5) Montrer que si f est intégrable sur I $\lim_{n\to\infty}\int_I \sin(nt)f(t)\,dt = 0$.

Exercice 4: *Une application du lemme de Riemann-Lebesgue*
1) Pour t réel calculer la somme $S_n(t) = \frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos nt$. On écrira le résultat sous la forme $a\frac{\sin b}{\sin c}$. On pourra par exemple utiliser les formules d'Euler pour interpréter cette somme comme la somme d'une série géométrique.
2) Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout n entier non nul on ait :

$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos nt\,dt = \frac{1}{n^2} \quad .$$

3) Montrer que la fonction valant $\frac{at^2+bt}{\sin\frac{t}{2}}$ sur $]0,\pi]$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
4) Déterminer $\lim_{n\to\infty}\int_0^n (at^2+bt)S_n(t)\,dt$.
5) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5: *Une application du lemme de Riemann-Lebesgue*
1) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$.
2) Calculer $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$.
Indication : Calculer $I_{n+1}-I_n$.
3) Montrer que la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ peut être prolongée à $[0,\pi]$ en une fonction de classe C^1.
4) Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t)f(t)\,dt = 0 \quad .$$

5) En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 6: Exprimer

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x-1}dx$$

à l'aide de la fonction Γ et de la fonction ζ de Riemann.

Exercice 7: Ecrire

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}dx$$

sous la forme de la somme d'une série.

Exercice 8: Soit (a_n) une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. Montrer que

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-a_n x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Exercice 9: Montrer que pour tout α dans $\mathbb{R}^{*+}$ on a

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}.$$

Exercice 10: Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n!\;dx}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

Exercice 11: Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

Exercice 12: Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ avec $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \ln(\sin x)\,dx$. Donner un équivalent de I_n.

Exercice 13: Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}dx$.

Exercice 14: Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ tendant vers l en $+\infty$ Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(t)}{n^2+t^2}dt$$

Exercice 15: On pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \;,\; g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt \quad .$$

1) Montrer que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer f' et g', qu'en déduisez vous ?
3) Calculer $\lim_{x\to\infty} g(x)$. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Exercice 16:
1) Déterminer, sous la forme d'une intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

2) Ramener le calcul de $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$ à celui de

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

3) Obtenir une relation de récurrence permettant de calculer I_n.
4) En utilisant la formule de Stirling en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Exercice 17: Etudier la fonction définie par

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(domaine de définition, continuité, dérivabilité, équation différentielle associée, calcul.)

Exercice 18: *Equivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre*
On considère la fonction définie par $J(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + a^2}}\,dx$. Etudier le domaine de définition de J, sa limite quand a tend vers 0, et finalement un équivalent de $J(a)$ quand a tend vers 0. En déduire un équivalent de $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + a^2}}\,dx$.