Intégration (I)

Exercice 1: Discuter l'intégrabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = (\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}$.

Exercice 2: Soit f une fonction positive intégrable sur $[1, +\infty[$, décroissante. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 3: Nature de l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + \cos \pi t}\, dt \quad ?$$

Exercice 4: Soient a et b deux réels, $0 < a < b$. Montrer l'existence et calculer la valeur de l'intégrale :
$$I = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Exercice 5: Existence de l'intégrale
$$\int_{]0,+\infty[} \frac{e^x\, dx}{e^{-x} + e^{2x}|\sin x|} \quad .$$

Exercice 6: Soit f une fonction admettant des limites l et l' en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\, dt$ converge et la calculer.

Exercice 7: Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$.

Exercice 8: Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + \operatorname{ch}^2 x}$.

Exercice 9: Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs strictement positives, si $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \dfrac{f(x+1)}{f(x)} \leq \dfrac{g(x+1)}{g(x)}$ et si g est intégrable, alors f est intégrable.

Exercice 10:
Soit $f \in C([0, +\infty[, \mathbb{C})$ telle que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{x+t}\, dt$ converge pour tout $x > 0$.

Exercice 11: Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Soit u un élément de E.
1) On suppose que u est intégrable. Montrer que pour tout élément v de E, borné, uv est intégrable.
2) On suppose que pour tout élément v de E, intégrable, uv est intégrable. Montrer que u est bornée.
3) On suppose que pour tout élément v de E, borné, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v(t)\, dt$ existe. Montrer que u est intégrable.

Exercice 12: Soit f une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$.
1) Montrer que si f est uniformément continue alors elle tend vers zéro en $+\infty$.
2) Montrer que le résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas f uniformément continue.

Exercice 13: Soit f une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Déterminer :
$$\lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+a) - f(x-a)|\, dx.$$