

Ensemble dénombrables – Familles sommables

Exercice 1: Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série de réels positifs. En introduisant la suite double $(x_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ définie par $x_{n,p} = a_n$ si $p < n$, $x_{n,p} = 0$ montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n,$$

dès que l'une des sommes est définie, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ lorsque cette somme est définie.

Exercice 2:

1) Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$ on a $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

2) En utilisant un produit de Cauchy en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} n z^n$, si $|z| < 1$.

3) En déduire, si $|z| < 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$.

Exercice 3: Montrer que pour t dans $] -1, 1[$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1-t^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) t^n$, où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n .

Exercice 4: Montrer que pour t dans $] -1, 1[$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{1-t^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}.$$

Exercice 5: Montrer qu'il existe une suite a_n de nombres réels tels que :

$$\forall x \in] -1, 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exprimer ces coefficients à l'aide de la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Exercice 6: Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n + n^2 m + 2mn}$.

Exercice 7: Un élément α est algébrique s'il existe un polynôme P , non nul, à coefficients dans \mathbb{Z} tel que $P(\alpha) = 0$. En introduisant, pour n entier non nul l'ensemble

$$E_n = \left\{ \alpha \in \mathbb{C}; \exists P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X] - \{0\}, \forall k \in [0, n] |a_k| \leq n, P(\alpha) = 0 \right\}$$

montrer que l'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques est dénombrable. En déduire qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas algébriques. De tels nombres sont dits transcendants.

Exercice 8:

1) Montrer qu'il existe une famille dénombrable de parties infinies de \mathbb{N} , deux à deux disjointes.

2) Existe-t-il une famille non-dénombrable de parties infinies de \mathbb{N} , deux à deux disjointes.

3) Existe-t-il une famille non-dénombrable de parties infinies de \mathbb{N} , dont les intersections deux à deux sont finies.