EXERCICES CLASSIQUES III

Ces exercices, illustrant des méthodes dont la maîtrise est impérative, sont rangés dans l'ordre de leur apparition dans le cours. Les exercices marqués du symbole (*) ne doivent être abordés que lorsque les autres sont assimilés.

Exercice 81: Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque, u un endomorphisme de E. On suppose que pour tout x de E il existe λ tel que $u(x) = \lambda.x$. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 82: Déterminer toutes les matrices qui commutent avec une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts.

Exercice 83: Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 84: Déterminer le centre de $M_n(\mathbb{K})$ c'est-à-dire

$$Z(M_n(\mathbb{K})) = \{M \in M_n(\mathbb{K}); \forall N \in M_n(\mathbb{K})\ MN = NM\}.$$

Exercice 85: f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$).
1) Montrer que tout sous espace propre de f est stable par g.
2) Prouver que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 86: Montrer que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

Exercice 87: Résoudre dans $M_n(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = A$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 88: Soit A dans $M_3(\mathbb{R})$, non nulle et vérifiant $A^3 = -A$.
1) Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.
2) Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 89: Montrer que si

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable alors $A = 0$.
Indication : Etudier $P(B)$ où P est un polynôme bien choisi.

Exercice 90: Montrer que si

$$B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 91: Soit M dans $M_n(\mathbb{K})$ une matrice possédant n valeurs propres distinctes et N dans $M_n(\mathbb{K})$ telle que $MN = NM$.
1) Montrer que N est diagonalisable.
2) Montrer que N est un polynôme en M.

Exercice 92:

$$M = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}), n \geq 2.$$

1) Déterminer le rang de M.
2) Calculer $\operatorname{tr} M^2$.
3) En déduire les valeurs propres de M et leurs multiplicités.

Exercice 93: Montrer que si une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 - A - I_n = 0$ alors $\det(A) > 0$.

Exercice 94:
1) Montrer que si une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 + A = 0$ alors son rang est pair.

Exercice 95: Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.
1) Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide celui de A.
2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B à l'aide des valeurs propres et des sous-espaces propres de A.
3) En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible et diagonalisable.

Exercice 96:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trouver les sous-espaces stables par A.

Exercice 97: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, toutes de même loi, indépendantes de la variable aléatoire N. On définit la variable aléatoire S par

$$\forall \omega \in \Omega \quad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

Calculer l'espérance de S, en fonction de celle de N et de X_1 qui seront supposées finies.

Exercice 98: Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X possède une espérance finie. Montrer :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

Exercice 99: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements. Montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geq n} A_p \right) =^{(\text{def})} \limsup_{n\to+\infty} A_n$$

est dans $\mathcal{A}$.
1) Quelle est l'interprétation de : « $\omega \in \limsup_{n\to+\infty} A_n$ » ?
2) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge alors $P(\limsup A_n) = 0$. On suppose maintenant la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ formée d'évènements indépendants.
3) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ diverge alors $P(\limsup A_n) = 1$.
Indication : Passer au complémentaire.