EXERCICES CLASSIQUES II

Ces exercices, illustrant des méthodes dont la maîtrise est impérative, sont rangés dans l'ordre de leur apparition dans le cours. Les exercices marqués du symbole (*) ne doivent être abordés que lorsque les autres sont assimilés.

Exercice 54: Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 55:
1) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \sin(\lambda t)\, f(t)\, dt = 0$
2) Le résultat reste vrai si f est une fonction en escalier.
3) Le résultat est encore vrai si f est continue par morceaux sur $[a,b]$.
4) Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ intégrable. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\infty}^{+\infty} \sin \lambda t\, f(t)\, dt = 0$.

Indication : Introduire la suite de fonction $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ avec $F_p(\lambda) = \displaystyle\int_{-p}^{p} \sin \lambda t\, f(t)\, dt$

Exercice 56: Déterminer sous la forme d'une intégrale : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \sin x\, dx$.

Exercice 57: Soit α un réel strictement positif. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$.

Exercice 58: Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ en n'utilisant que le programme de première année.

Exercice 59: Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ en utilisant le théorème de convergence dominée pour permuter intégration et sommation.

Exercice 60: Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n \ln(1+u^n)\, du$.

Exercice 61: Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x\, dx$. Ne pas laisser le résultat sous la forme d'une intégrale.

Exercice 62: Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 63: On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+\cdots+x^n} dx$. Etudier la suite (u_n) .

Exercice 64: Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nt^n f(t)\, dt$.

Exercice 65: On voudrait prouver : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.
1) Prouver ce résultat en utilisant le théorème de convergence dominée.
2) Prouver ce résultat en intégrant directement la somme partielle d'une suite géométrique.
3) (subsidiaire) Calculer la valeur de la somme.

Exercice 66:
1) Donner une condition nécessaire sur le nombre complexe s pour que la fonction $t \mapsto te^{-st}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$, donner alors la valeur de son intégrale sur cet intervalle.
2) Ecrire, sur un domaine de valeurs de x qu'on précisera, la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos xt}{e^t+1} dt$ comme la somme d'une série de fonctions, en utilisant le théorème classique de permutation de l'intégration et de la sommation.

Exercice 67:
1) Majorer $\left|\frac{\ln(x^2+t^2)|}{1+t^2}\right|$ par une fonction de t indépendante de x, sachant que x est dans l'intervalle $[-a,a]$. Cette fonction est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$?
Indication : On commencera par encadrer $\ln(x^2+t^2)$, en utilisant la croissance du logarithme.
2) Majorer simplement $\left|\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right|$ par une fonction de t sachant que x est dans l'intervalle $[a,b]$. Existe-t-il une majoration si x est dans l'intervalle $[a,+\infty[$, une majoration si x est un réel quelconque en restreignant t à $\mathbb{R}^{*+}$?

Exercice 68:
1) Majorer $\left|\ln(1-2x\cos t+x^2)\right|$ par une fonction de t indépendante de x, définie sur $]0,\pi[$, sachant que x est dans l'intervalle $[0,a]$, $a>1$. Cette fonction est-elle intégrable ?
2) Reprendre la question si x est dans $[-a,a]$, $a>1$.

Exercice 69: Etudier la continuité et la dérivabilité de $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)\,dt$ où f est à valeurs complexes. On pourra imposer des conditions sur f pour que F soit de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 70: Soit f une fonction continue et bornée sue $\mathbb{R}^+$. Montrer que $L(f): x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 71: On pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt \text{ et } g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt.$$

1) Donner le domaine de définition de f. Prouver que f est continue sur cette intervalle.
2) Donner le plus grand intervalle sur lequel g est définie. Montrer que g est continue sur cet intervalle.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
4) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
5) Montrer que f et g sont solutions sur $\mathbb{R}^{*+}$ de l'équation différentielle $(E): y''+y=\frac{1}{x}$.
6) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

Exercice 72: Ecrire sous la forme d'une série $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t-1}\,dt$.

Exercice 73: Posons $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+\frac{x}{t^2})}dt$.
1) Domaine de définition de f.
2) Continuité de f.
3) Dérivabilité de f.
4) Calcul de f à l'aide d'une équation différentielle.

Exercice 74: Calculer $I(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{t}e^{-t}dt$.
Indication : Montrer que I est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 75: Soit $f: x\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,dt$.
1) Etudier la continuité de f
2) Etudier la dérivabilité de f.
3) Calculer f.

Exercice 76: On veut calculer $I(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(tx)e^{-t^2}dt$.
1) Montrer que I est dérivable.
2) Montrer que I et solution d'une équation différentielle simple.
3) En déduire la valeur de $I(x)$.

Exercice 77: Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+xt)}{t(1+t^2)}\,dt$.
1) Domaine de définition ?
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3) Calculer $f'(x)$.
4) En déduire $f(x)$.

Exercice 78: Si E et F sont deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ toute application continue f de E vers F vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)$ est linéaire.

Exercice 79: Déterminer le nombre d'éléments inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{78\mathbb{Z}}$. Justifier la caractérisation employée.

Exercice 80: Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ inversible dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que son inverse est dans $M_n(\mathbb{Z})$ si et seulement $\det A=\pm 1$.