Points à connaître

Une liste de points du programme qu'il serait bon de connaître.
Lorsqu'on vous demande l'énoncé et la démonstration, l'énoncé précis est indispensable mais la démonstration n'est pas aussi importante.

Point 1 : Enoncé et démonstration du théorème de Cesàro.

Point 2 : Définition de deux suites adjacentes. Démonstration de la convergence de ces suites vers une limite commune.

Point 3 : Enoncé et démonstration du théorème de Weierstrass dans le cas de $\mathbb{R}$.

Point 4 : Développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre n.

Point 5 : L'alphabet grec.

Point 6 : Etude de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque f est croissante et continue sur un intervalle stable. Justification de la convergence. Caractérisation de la limite

Point 7 : Définition des relations de domination, de prépondérance et d'équivalence entre suites de nombres réels et complexes. Propriétés principales

Point 8 : Définition d'une série dans un espace vectoriel, d'une série convergente de nombres complexes

Point 9 : Définition d'une série absolument convergente de nombres complexes. Une série absolument convergente de nombres complexes est convergente.

Point 10 : Caractérisation de la convergence d'une série à terme positifs. Prouver : une série à termes positifs dont le terme général est majoré par celui d'une série convergente est convergente.

Point 11 : Enoncé du critère de comparaison logarithmique. Démonstration

Point 12 : Enoncé du théorème sur l'usage des relations de comparaison dans l'étude de la convergence des séries à termes positifs.

Point 13 : Enoncé de la règle de d'Alembert.

Point 14 : Enoncé de la règle de Riemann.

Point 15 : Enoncé du théorème du cours sur la comparaison d'une série et d'une intégrale.

Point 16 : Enoncé du théorème sur la sommation des relations de comparaison.

Point 17 : Enoncé du critère spécial de convergence pour les séries alternées, avec les résultats annexes.

Point 18 : Etablir un développement de $\exp x$, pour x réel sous la forme de la somme d'une série en utilisant la formule de Taylor.

Point 19 : Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe (avec justification).

Point 20 : Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \circ(1)$, où γ est un réel.

Point 21 : Prouver $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Point 22 : Développement limité de cos et sin en 0, à l'ordre n.

Point 23 : Définition du produit de Cauchy de deux séries de nombres complexes. Enoncé du théorème fondamental sur la convergence.

Point 24 : Enoncé du théorème sur la permutation des sommations d'une suite double.

Point 25 : Enoncé de la formule de Taylor avec reste intégrale.

Point 26 : Définition de la limite d'une fonction en un point.

Point 27 : Définition de la continuité en un point. Définition à l'aide de quantificateurs de la continuité sur une partie.

Point 28 : Définition d'un ouvert. Propriétés ensemblistes des ouverts. Justification.

Point 29 : Définition de l'adhérence d'une partie. Enoncé de la caractérisation séquentielle.

Point 30 : Définition de l'adhérence d'une partie. Enoncé de la caractérisation métrique.

Point 31 : Définition d'une norme. Montrer que la norme est 1-lipschitzienne.

Point 32 : Définition de la convergence simple et de la convergence uniforme d'une suite de fonctions. Montrer que l'une implique l'autre.

Point 33 : Définition de la convergence normale d'une série de fonctions. Critère de caractérisation. Dans le cas des fonctions à valeurs complexes montrer qu'elle implique la convergence uniforme

Point 34 : Enoncer le théorème de permutations des limites pour une suite de fonctions, puis pour une séries de fonctions (à valeurs réelles ou complexes).

Point 35 : Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

Point 36 : Montrer que la fonction $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Point 37 : Enoncer le théorème de la limite de la dérivée.

Point 38 : Montrer que $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Point 39 : Démontrer que la suite $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de limite si $\alpha \in]0, \pi[$.

Point 40 : Enoncer le théorème sur l'intégration sur un segment d'une suite de fonctions.

Point 41 : Enoncer le théorème sur la dérivation de la somme d'une série de fonctions.

Point 42 : Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

Point 43 : Montrer que la fonction $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Point 44 : Enoncé du théorème de Weierstrass sur l'approximation d'une fonction continue à valeurs complexes.

Point 45 : Enoncé du lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence d'une série entière.

Point 46 : Utilisation de la règle de d'Alembert pour la détermination du rayon de convergence d'une série entière.

Point 47 : Enoncé du théorème sur la continuité de la somme d'une série entière.

Point 48 : Enoncé du théorème sur l'intégrabilité de la somme d'une série entière.

Point 49 : Enoncé du théorème sur la dérivabilité de la somme d'une série entière.

Point 50 : Définition d'une fonction développable en série entière.

Point 51 : Développement en série entière de sin et cos. Justification pour l'une des deux.

Point 52 : Développement en série entière de $\ln(1+x)$. Justification.

Point 53 : Supposant connu le développement en série entière de $\ln(1+x)$ sur $]-1,1[$ expliquer pourquoi il reste valide sur $]-1,1]$.

Point 54 : Développement en série entière de $\arctan x$. Justification..

Point 55 : Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$, sans justification.

Point 56 : Enoncé du théorème de Rolle

Point 57 : Enoncé et démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii, dans le cadre d'un espace préhilbertion complexe.

Point 58 : Prouver l'existence d'une base orthonormale d'un espace hermitien, en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Point 59 : Exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel ou complexe à l'aide d'une base orthonormale et à l'aide d'une base orthogonale.

Point 60 : Développement en série entière de ch, sh et argth, sans justification.

Point 61 : Caractérisation d'une application linéaire continue.

Point 62 : Caractérisation d'une application bilinéaire continue. Donner trois exemples classiques.

Point 63 : Definition de l'équivalence des normes.

Point 64 : Définition séquentielle d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé

Point 65 : Donner les trois propriétés importantes vérifiées par les fonctions continues sur un compact.

Point 66 : Définition d'une application uniformément continue, d'une application lipschitzienne. Montrer qu'une de ces propriétés implique l'autre mais que la réciproque est fausse.

Point 67 : Démontrer que toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.

Point 68 : Citez les cinq propriétés vérifiées par les espaces vectoriels de dimension finie.

Point 69 : Si u est un endomorphisme d'un espace de dimension fine, montrer que $\exp u$ est défini.

Point 70 : Définir une partie connexe par arcs.

Point 71 : Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

Point 72 : Enoncé le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs vectorielles.

Point 73 : Démontrer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs vectorielles, de classe $\mathcal{C}^1$.

Point 74 : Enoncé et démonstration de la formule de Leibniz sur la dérivation de $B(f, g)$ où B est bilinéaire.

Point 75 : Définition d'une fonction intégrable à valeurs positives.

Point 76 : Définition de l'intégrale impropre d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

Point 77 : Prouver qu'une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$, positive est intégrable si et seulement si son intégrale impropre converge.

Point 78 : Donner un exemple, en justifiant vos affirmations, d'une fonction non intégrable dont l'intégrale impropre converge.

Point 79 : Enoncer la règle de Riemann pour l'intégrabilité des fonctions positives.

Point 80 : Quand dit-on qu'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes est intégrable ? Comment définit-on alors son intégrale (On pourra commencr par les fonctions à valeurs réelles).

Point 81 : Enoncer le théorème sur le changement de variable dans une intégrale

Point 82 : Qu'est-ce que la convergence en moyenne sur un intervalle quelconque ?

Point 83 : Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I, à valeurs complexes et de carré intégrable est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. Montrer qu'on peut naturellement définir un produit scalaire sur cet espace.

Point 84 : Enoncer le théorème de convergence dominée

Point 85 : Enoncer le théorème usuel permettant d'intégrer terme à terme la somme d'une série de fonctions

Point 86 : Enoncer le théorème sur la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Point 87 : Enoncer le théorème sur la dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Point 88 : Démontrer le théorème de convergence dominée lorsqu'il y a convergence uniforme sur tout segment.

Point 89 : Démontrer le théorème sur l'intégration de la somme d'une série de fonctions lorqu'il y a convergence uniforme sur tout segment.

Point 90 : Démontrer le théorème sur la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Point 91 : Démontrer le théorème sur la dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Point 92 : Définition d'un groupe, d'un sous-groupe. Caractérisation d'un sous-groupe.

Point 93 : Définition d'un morphisme de groupe de son noyau de son image. Montrer que ce sont des sous-groupes.

Point 94 : Définition de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ si n est un entier non nul. Caractérisation sans démonstration des générateurs du groupe $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +)$.

Point 95 : Définition d'un groupe cyclique. Montrer que tout groupe cyclique est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Point 96 : Définition d'un idéal dans un anneau commutatif unitaire. Caractérisation

Point 97 : Montrer que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où n est un entier positif, sans utiliser la structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.

Point 98 : Montrer que tout idéal non réduit à 0 de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$ où P est un polynôme unitaire et qu'un tel polynôme est unique.

Point 99 : Définition d'un morphisme d'anneaux unitaires, de son image et de son noyau. Que dire de leurs structures algébriques ? Le prouver.

Point 100 : Caractérisation des élements inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ (avec la justification).

Point 101 : Si A est un anneau alors l'ensemble A^* de ses éléments inversibles est un groupe pour la multiplication.

Point 102 : Soit n un entier non nul, $\phi(n)$ l'indicatrice d'Euler de n. Dire ce que représente $\phi(n)$ et montrer que pour tout entier m premier avec n on a $m^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

Point 103 : Montrer que si m et n sont premiers entre eux alors $\frac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}}$ est isomorphe en tant qu'anneau à $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$

Point 104 : Définir une combinaison linéaire d'une famille quelconque de vecteurs, une famille libre, une famille génératrice.

Point 105 : Montrer que la famille $(x \mapsto e^{cx})_{c\in\mathbb{C}}$ est libre.

Point 106 : Donner trois définitions équivalentes de la somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Point 107 : Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires dans E, montrer qu'il existe une unique application linéaire de E vers H dont les restrictions à F et G sont données.

Point 108 : Enoncer le théorème du rang pour des espaces vectoriels de dimension quelconque.

Point 109 : Démontrer le théorème du rang pour des espaces vectoriels de dimension quelconque.

Point 110 : Dans un espace vectoriel de dimension quelconque définir un hyperplan, une équation de cet hyperplan. Prouver que toutes les équations d'un hyperplan sont proportionnelles

Point 111 : Définir le rang d'une matrice.

Point 112 : Quand dit-on que deux matrices sont équivalentes ? En donner une interprétation en termes d'applications linéaires.

Point 113 : Quand dit-on que deux matrices sont semblables ? En donner une interprétation en termes d'endomorphismes.

Point 114 : Montrer que toute matrice de rang r est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Point 115 : Définir la matrice de changement de base. Formuler son effet sur les coordonnée d'un vecteur

Point 116 : Formuler à l'aide des matrices de passage l'effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Point 117 : Formuler à l'aide de la matrice de passage l'effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

Point 118 : Définir la trace d'une matrice carrée. Propriétés. Donner, en la justifiant la définition de la trace d'un endomorphisme.

Point 119 : Lien entre la trace d'un projecteur et son rang. Justifier ce résultat.

Point 120 : Définition d'un polynôme d'un endomorphisme.

Point 121 : Enoncé et démonstration du théorème de décomposition des noyaux.

Point 122 : Définition d'un sous-espace stable. Exemples. Caractérisation matricielle.

Point 123 : Définition des éléments propres d'un endomorphisme.

Point 124: Démontrer que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Point 125: Définition du polynôme minimal d'un endomorphisme.Montrer que ses racines sont exactement les valeurs propres de l'endomorphisme..

Point 126 : Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme. Montrer que les valeurs propres d'un sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.

Point 127 : Définition d'un endomorphisme diagonalisable.(Donner deux définitions)

Point 128 : Conditions nécessaires pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Point 129 : Conditions suffisantes pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Point 130 : Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Point 131 : Conditions nécessaires pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable.

Point 132 : Conditions suffisantes pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable.

Point 133 : Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable.

Point 134 : Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.(Trois démonstrations possibles)

Point 135: Définition d'une matrice diagonalisable, d'une matrice trigonalisable (En termes de similitude).

Point 136 : Définition des éléments propres d'une matrice, de son polynôme caractéristique, de son polynôme minimal.

Point 137 : Définition d'une fonction convexe. Caractérisation pour une fonction dérivable, pour une fonction deux fois dérivable.

Point 138 : Inégalité de Jensen pour une fonction dérivable. Démonstration.

Point 139 : Caractérisation des fermés dans un espace vectoriel normé.

Point 140 : Théorème de structure pour les éléments de $O(n)$.

Point 141: Décomposition $d+n$ d'un endomorphisme et interprétation matricielle (seulement l'existence).

Point 142 : Enoncer le théorème sur l'intégration des relations de comparaison.

Point 143 : Dans un espace euclidien, définition de l'isomorphisme canonique entre l'espace et son dual. Prouver qu'il s'agit bien d'un isomorphisme.

Point 144: Définition d'un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien.(deux propriétés équivalentes)

Point 145 : Etant donné une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ comment montrez vous qu'il s'agit de la matrice d'une rotation et comment trouvez-vous ses éléments caractéristiques ?

Point 146 : Enoncer le théorème spectral, pour les endomorphismes et pour les matrices.

Point 147 : Démontrer le théorème spectral pour les endomorphismes.

Point 148 : Enoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Point 149 : Exposer la méthode de la variation des constantes pour une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Point 150 : Résoudre l'équation à coefficients constants $y'' + ay' + by = P(x)e^{mx}$, en discutant suivant les différentes configurations des paramètres (P est un polynôme).

Point 151 : Enoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.

Point 152 : Définir la dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables définie sur un ouver. Définir une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Point 153 : Définir la matrice jacobienne d'une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$.

Point 154 : Donner la formule permettant de calculer la dérivée partielle d'une fonction composée.

Point 155 : Définition d'un extremum local. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une fonction différentiable.

Point 156 : Tangente à une courbe .

Point 157 : Normale à une courbe plane.

Point 158 : Définition d'une tribu et d'un espace probabilisable.

Point 159 : Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable.

Point 160: Enoncé du théorème de continuité croissante pour une probabilité. Application à la probabilité d'une réunion.

Point 161 : Enoncé du théorème de continuité décroissante.

Point 162 : Probabilité conditionnelle

Point 163 : Formule des probabilités composées.

Point 164 : Formule des probabilités totales.

Point 165 : Définition de l'indépendance d'une famille d'évènements.

Point 166 : Définition d'une variable aléatoire discrète.

Point 167 : Loi d'une variable aléatoire.

Point 168 : Loi conjointe, loi marginale d'un couple de variables aléatoires

Point 169 : Indépendance d'une famille de variables aléatoires.

Point 170 : Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables aléatoires indépendantes.

Point 171 : Loi géométrique de paramètre p dans $]0,1[$. Espérance, variance et fonction génératrice.

Point 172 : Loi géométrique de Poisson de paramètre λ. Espérance, variance et fonction génératrice.

Point 173 : Caractérisation de la loi géométrique comme loi sans mémoire.

Point 174 : Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.

Point 175: Définition de l'espérance d'une variable aléatoire (avec le cas particulier des variables aléatoires positives).

Point 176 : Propriétés de base de l'espérance.

Point 177 : Formule de transfert.

Point 178 : Inégalité de Markov.

Point 179 : Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.

Point 180 : Variance d'une variable aléatoire. Ecart-type.

Point 181 : Inégalité de Cauchy-Schwarz pour un couple de variables aléatoires.

Point 182 : Covariance de deux variables aléatoires réelles.

Point 183 : Variance d'une somme finie de variables aléatoires réelles.

Point 184 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Point 185 : Loi faible des grands nombres.

Point 186 : Définition de la fonction génératrice. Premières propriétés.

Point 187 : Utilisation de la fonction génératrice pour la détermination de l'espérance et de la variance.

Point 188 : Fonction génératrice de la somme de variables indépendantes.

Point 189 : Définition de l'exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme dans un espace de dimension finie.

Point 190 : Continuité de l'exponentielle.

Point 191 : Exponentielle de la somme de deux endomorphismes.

Point 192 : Adaptation de la méthode de la variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.

Point 193 : Définition du wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.

Point 194 : Définition d'une dérivée partielle.

Point 195 : Caractérisation des fonctions de plusieurs variables de classe $\mathcal{C}^1$.