Chapitre 9

Intégration sur un intervalle quelconque

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou complexes. Même quand on oublie de le dire toutes les fonctions qui apparaissent sont supposées continues par morceaux.

9.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition 9.1 *Si f est une fonction continue par morceaux de $[a, +\infty[$ vers $\mathbb{K}$, lintégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_A^x f(t)\,dt$ possède une limite en $+\infty$. On appelle cette limite l'intégrale (généralisée) de f sur $[a, +\infty[$ et on la note*

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

On verra plus tard que la notation $\displaystyle\int_{[a,+\infty[} f$ est réservée aux fonctions intégrables, dont la définition viendra en temps utile. Elle ne doit pas être utilisée pour les intégrales convergentes.
Exemples fondamentaux d'intégrales convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

On remarquera que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\,dt$ n'est pas convergente bien que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty, n\in\mathbb{N}} \int_0^{n\pi} \cos t\,dt = 0$. La caractérisation séquentielle de la limite permet d'affirmer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $[a, +\infty[$ tendant vers $+\infty$ la suite $\displaystyle\left(\int_a^{a_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est alors indépendante de la suite et vaut $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.
Rappelons un résultat établi lors de l'étude des séries.

Résultat 9.1 *Si f est une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0, +_i nfty[$, alors $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.*

Proposition 9.1 *L'ensemble des fonctions $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ dont l'intégrale converge est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et l'application définie sur cet espace qui à f associe $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est linéaire.*

Proposition 9.2 *Si $f : [a, +\infty[$ est positive, c'est-à-dire à valeurs réelles et positives et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \geq 0$*

Il en résulte, en fusionnant les deux résultats précédents, que si f et g sont deux fonctions à valeurs réelles définies sur $[a, +\infty[$, telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ convergent, vérifiant $f \geq g$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \geq \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$

Proposition 9.3 *Si $b \in [a, +\infty[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et dans ce cas on a :*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^{+\infty} f(t)\,dt.$$

En particulier, si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, on obtient, pour tout x de $[a, +\infty[$:

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt.$$

On en déduit la proposition :

Proposition 9.4 *Si f est* **continue** *sur $[a, +\infty[$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge la fonction*

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto -f(x)$.

9.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition 9.2 *Une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge. On dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est absolument convergente. Son intégrale, notée $\int_{[a,+\infty[} f$ est alors son intégrale généralisée :*

$$\int_{[a,+\infty[} f = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f.$$

Vocabulaire 9.1 *Si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f$ *est convergente, mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.*

Le théorème suivant nous sera d'une grande utilité.

Théorème 9.1 *Soit* f *une fonction intégrable sur* $[a, +\infty[$*, alors* $\int_a^{+\infty} f$ *converge.*

Remarque 9.1 *La réciproque est fausse, comme le montre la fonction*

$$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

définie sur $\mathbb{R}^+$ *(prolongée par continuité en* 0*).*

Ce théorème arrive un peu tôt dans l'ordre du programme (que je respecte). Il aurait été un peu plus facile à démontrer en utilisant des résultats qui vont être démontrés ultérieurement.
Démontrons le avec les moyens actuellement à notre disposition.
Posons, pour n entier, $u_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(t)\,dt$ et $v_n = \int_{a+n}^{a+n+1} |f(t)|\,dt$. On a, d'après l'inégalité triangulaire $|u_n| \leq v_n$, et d'après la relation de Chasles

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \int_a^{a+n+1} |f(t)|\,dt.$$

Puisque $\int_a^{+\infty} |f|$ converge on en déduit que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, puis que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument et par conséquent converge.
On a donc prouvé que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty, n\in\mathbb{N}} \int_a^{a+n} f(t)\,dt = \ell$ existe. Soit x dans $[a, +\infty[$. Il existe un unique entier $n(x)$ tel que $a + n(x) \leq x < a + n(x) + 1$. On aura

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{n(x)-1} u_n + \int_{a+n(x)}^x f(t)\,dt.$$

De plus

$$\left| \int_{a+n(x)}^x f(t)\,dt \right| \leq \int_{a+n(x)}^x |f(t)|\,dt \leq \int_{a+n(x)}^{a+n(x)+1} |f(t)|\,dt = v_{n(x)}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} n(x) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ (puisque $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge). Il en résulte

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \ell.$$

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge.

q.e.d.

Résultat 9.2 *Si* f *est intégrable et possède une limite en* $+\infty$ *cette limite est nulle.*

Mais une fonction peut être intégrable sans posséder de limite en $+\infty$ (exemple : le crocodile), elle peut même ne pas être bornée au voisinage de $+\infty$ (le crocodile aux longues dents).

Résultat 9.3 *Si* f *est intégrable sur* $[a, +\infty[$*,* $|f|$ *est intégrable sur* $[a, +\infty[$ *et*

$$\left| \int_{[a,+\infty[} f \right| \leq \int_{[a,+\infty[} |f|.$$

9.3 Intégration des fonctions à valeurs positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Proposition 9.5 *Si f est positive sur $[a, +\infty[$, l'intégrale ds $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée.*

La positivité de f implique la croissance de $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$. Cette fonction possède une limite en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée.

Proposition 9.6 *Soit α un réel, la fonction $f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.*

Ce résultat à été établi dans la section précédente, puis f_α étant positive, son intégrabilité équivaut à la convergence de son intégrale.
Le théorème qui suit sera d'utilité constante.

Théorème 9.2 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, positives définies sur $[a, +\infty[$. si g est intégrable sur $[a, +\infty[$ et si $f \leq g$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ et $\displaystyle\int_{[a,+\infty[} f \leq \int_{[a,+\infty[} g$.*

On pourra même utiliser le résultat suivant, qui même s'il n'est pas explicité dans le programme, est d'un usage plus que toléré :

Résultat 9.4 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, définies sur $[a, +\infty[$, f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g positive. si g est intégrable sur $[a, +\infty[$ et si $|f| \leq g$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ et*

$$\left| \int_{[a,+\infty[} f \right| \leq \int_{[a,+\infty[} |f| \leq \int_{[a,+\infty[} g.$$

Du théorème précédent résulte immédiatement le théorème suivant, d'utilisation plus courante.

Théorème 9.3 *Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +_infty[$, positives, alors :*
- *si $f =_{+\infty} \mathcal{O}(g)$ et g est intégrable alors f est intégrable,*
- *si $f \sim_{+\infty} g$ et g est intégrable alors f est intégrable.*

9.4 Intégration sur un intervalle quelconque

Tout ce qui vient d'ètre fait est adapble à des intervalle quelconque.
Si $[a, b[$, $b < +\infty$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si f est continue par morceaux sur $[a, b[$, on dira que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si $x \mapsto \int_a^x$ possède une limite en b^-. La fonction f sera intégrable si $\int_a^b |f|$ converge.
Tous les résultats de linéarité, positivité, utilisation des relations de comparaison restent valables. Seuls les fonctions de références changent.

Proposition 9.7 *La fonction $x \mapsto \frac{1}{(b-x)^\alpha} = \frac{1}{|x-b|^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.*

On étudiera de même l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $]-\infty, b]$.

Proposition 9.8 *La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.*

En ce qui concerne l'intégrale sur $]a, b]$, $a > -\infty$, l'outil de base sera :

Proposition 9.9 *La fonction* $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha} = \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ *est intégrable sur* $]a, -1]$ *si et seulement si* $\alpha < 1$.

Finalement, si f est continue par morceaux sur l'intervalle $]a, b[$ on dira que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seuelemnt si il existe c dans $]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t)\,dt$ converge ainsi que $\int_c^b f(t)\,dt$. on définit alors l'intégrale de f par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt.$$

On peut vérifier que cette propriété et la valeur de l'intégrale sont indépendantes de c.
Les cas précédents la fonction f sera intégrable si $\int_a^b |f|$ converge. Et si f est intégrable alors $\int_a^b f(t)\,dt$.

Résultat 9.5 *Il résulte du résultat obtenu en première année sur la continuité de l'intégrale d'une fonction* f *continue par morceaux sur un segment* $[a, b]$ *qu'une telle fonction est intégrable sur* $]a, b[, [a, b[,]a, b]$ *avec*

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_{[a,b[} f(t)\,dt = \int_{]a,b]} f(t)\,dt = \int_{]a,b[} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt,$$

le dernier symbole pouvant représenter trois intégrales généralisées.

Et étendons la notation $\int_a^b f(t)\,dt$ au cas $a = b$ par $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, et au cas $b < a$ par $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$. Avec ces conventions, on a :

Proposition 9.10 (Relation de Chasles) *Si* a, b *et* c *sont trois points de l'adhérence dans* $\overline{\mathbb{R}}$, *d'un intervalle* I *sur lequel la fonction* f *est intégrable, alors :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Proposition 9.11 *L'ensemble des fonction intégrables sur l'intervalle* I *est un sous-espace vectoriel (de l'ensemble des fonctions à valeurs complexes), et le passage à l'intégrale est linéaire.*

Le résultat suivant n'apporte rien de neuf, mais synthétise des résultats similaires.

Proposition 9.12 (Inégalité triangulaire) *Si* f *est intégrable sur* I *alors*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

Le théorème suivant est une généralisation du théorème sur un segment

Théorème 9.4 *Si* f *est continue, positive et intégrable sur* I *et si* $\displaystyle\int_I f = 0$, *alors* f *est nulle sur* I.

Théorème 9.5 (Changement de variable) *Si* f *est continue sur* $]a, b[$, *si* $\phi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ *est bijective, strictement croissante et de classe* $\mathcal{C}^1$ *alors les intégrales* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)\,du$ *sont de même nature, et égale en cas de convergence de l'une.*

Exemple 9.1 *Calcul de*

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a^2\cos^2 t} dt.$$

Ce théorème reste valable si ϕ est strictement décroissante, sauf que cette fois-ci les intégrales sont opposées. On peut résumer ces deux énoncés en un seul, en supposant ϕ strictement monotone et en écrivant

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))|\phi'(u)|\,du.$$

On remarquera que dès que ϕ est continue et bijective, elle est nécessairement strictement monotone.

Théorème 9.6 (Intégration par parties) *Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle d'extrémités a et b on à l'égalité*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

dès l'instant où deux des trois termes ont un sens, le troisième en possédant alors un de facto.

La notation $[f(t)g(t)]_a^b$ désigne $\lim_{x\to b} f(x)g(x) - \lim_{x\to a} f(x)g(x)$.

Exemple 9.2

— *Convergence de*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

— *Equation fonctionnelle de la fonction Γ :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

9.5 Intégration des relations de comparaison

Proposition 9.13 *Soient f et ϕ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ pour f, à valeurs réelles positives pour ϕ, supposons que ϕ soit intégrable sur $[a,b[$.*

— *Si $f(x) =_b \mathcal{O}(\phi(x))$, alors f est intégrable et*

$$\int_x^b f(t)\,dt =_b \mathcal{O}(\int_x^b \phi(t)\,dt).$$

— *Si $f(x) =_b \circ(\phi(x))$, alors f est intégrable et*

$$\int_x^b f(t)\,dt =_b \circ(\int_x^b \phi(t)\,dt).$$

— *Si f est à valeurs réelles et si $f(x) \sim_b \phi(x)$, alors f est positive au voisinage de b, est intégrable intégrable et*

$$\int_x^b f(t)\,dt \sim_b \int_x^b \phi(t)\,dt.$$

Proposition 9.14 *Soient f et ϕ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs réelles positives, supposons que f ne soit pas intégrable sur $[a,b[$.*

— *Si* $f(x) =_b \mathcal{O}(\phi(x))$, *alors* ϕ *n'est pas intégrable et*

$$\int_a^x f(t)\,dt =_b \mathcal{O}(\int_a^x \phi(t)\,dt).$$

— *Si* $f(x) =_b \circ(\phi(x))$, *alors* ϕ *n'est pas intégrable et*

$$\int_a^x f(t)\,dt =_b \circ(\int_a^x \phi(t)\,dt).$$

— *Si* $f(x) \sim_b \phi(x)$, *alors* ϕ *n'est pas intégrable et*

$$\int_a^x f(t)\,dt \sim_b \int_a^x \phi(t)\,dt.$$

Exemple 9.3 *Equivalents en* $+\infty$ *de*

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \text{ et } \int_x^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

9.6 Théorèmes de permutation

Théorème 9.7 (Convergence dominée) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle* I, *à valeurs réelles ou complexes. On suppose :*

— *La suite* f_n *converge simplement vers une fonction* f, *continue par morceaux sur* I,

— *Il existe une fonction* ϕ, *continue par morceaux, à valeurs réelles (automatiquement positives), intégrable sur* I, *telle que pour tout* n *on ait* $|f_n| \leq \phi$.

Alors f *est intégrable, ainsi que chaque* f_n, $n \geq 0$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

Démontrons ce résultat dans le cas où la suite des f_n converge uniformément sur tout segment. Le programme précédent stipulait que cette démonstration était exigible des étudiants.

Pour tout n $|f_n| \leq \phi$, donc f_n est intégrable.

Par passage à la limite on obtient $|f| \leq \phi$, donc f est intégrable.

Soit (J_p) une suite croissante de segments dont la réunion est I. Puisque (f_n) converge uniformément vers f sur J_p, on aura

$$\int_{J_p} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_p} f_n \text{ et } \int_I f = \lim_{p\to+\infty} \int_{J_p} f.$$

Sachant que

$$\int_I f_n = \lim_{p\to+\infty} \int_{J_p} f_n$$

il s'agit à nouveau de permuter deux passages à la limite.

Posons $u_p : n \mapsto \int_{J_p} f_n$.

— Chaque u_p possède une limite en $+\infty$, c'est $\int_{J_p} f$.

— La suite de ces limites existe car f est intégrable.

— La suite (u_p) converge uniformément vers $u : n \mapsto \int_I f_n$ car pour tout n

$$|u(p) - u_p(n)| = |\int_{I-J_p} f_n| \leq \int_{I-J_p} |f_n| \leq \int_{I-J_p} |\phi| = \int_I \phi - \int_{J_p} \phi.$$

Le dernier membre de cette suite d'inégalité tend vers 0 car ϕ est intégrable.

.

On peut permuter les passages à la limite et ceci démontre le théorème.

Le programme offre une version étendue de ce théorème, un résultat qui pouvait être ramené antérieurement au théorème de convergence dominée à l'aide de la carctérisation séquentielle de la limite.

Exemple 9.4

De base

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx.$$

Changement de variable (1)

$$\lim_{n_vers+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2t^2} f(t)\, dx,$$

où f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Changement de variable (2) Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+_infty$ de

$$\int \ln(1+t^n)\, dt.$$

Deux rédactions possibles.

Un grand classique

$$\lim_{n_vers+\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Théorème 9.8 (Convergence dominée étendu) *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, a dans $\overline{J}$ un point adhérent à J, $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes. On suppose :*

— *Pour tout x de J $\lim_{\lambda\to a} f_\lambda(x) = f(x)$ où f est une continue par morceaux sur I,*

— *ll existe une fonction ϕ, continue par morceaux, à valeurs réelles (automatiquement positives), intégrable sur I, telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on ait $|f_\lambda| \leq \phi$.*

Alors f est intégrable, ainsi que chaque f_λ, $\lambda \in \Lambda$, et

$$\lim_{\lambda\to a} \int_I f_\lambda = \int_I \lim_{\lambda\to+\infty} f_\lambda.$$

Théorème 9.9 (Intégration de la somme d'une série de fonction) *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une séries de fonctions définies sur l'intervalle I, à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux. On suppose que cette série converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$$

converge. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Démontrons ce résultat dans le cas où la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment. Le programme stipulant que cette démonstration est exigible des étudiants.
Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Soit (J_p) une suite croissante de segments dont la réunion est I. On a pour tout n $|f| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k|$, donc par intégration, pour tout p

$$\int_{J_p} |f| \leq \sum_{k=0}^{n} \int_{J_p} |f_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \int_I |f_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|.$$

Il en résulte que f est intégrable sur I, et $\int_I |f| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$.
L'intégrale de f sur I sera donnée par

$$\int_I f = \lim_{p\to\infty} \int_{J_p} f = \lim_{p\to\infty} \int_{J_p} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \lim_{p\to\infty} Sa \int_{J_p} f_n,$$

la dernière égalité étant justifiée par le fait que la série converge uniformément sur J_p.
Il reste à permuter le passage à la limite et la sommation, pour cela on va prouver que la suite de fonctions (u_n) avec $u_n : p \mapsto \int_{J_p} f_n$ converge uniformément (sur $\mathbb{N}$). Elle converge en fait normalement car pour tout p

$$|u_n(p)| \leq \int_{J_p} |f_n| \leq \int_I |f_n|$$

et la série de terme général $\int_I |f_n|$ est convergente. Or, pour tout n $\lim_{p\to\infty} = \int_I f_n$ existe. Et la série $\sum_{n\geq 0} \int_I f_n$ converge absolument car $|\int_I f_n| \leq \int_I |f_n|$ et $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge.
Les trois hypothèses du théorème de permutation des limites sont vérifiées. On peut donc permuter passage à la limite et sommation et le théorème est démontré.

Exemple 9.5

Le théorème s'applique.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\, dx.$$

Le théorème ne s'applique pas.

$$\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\, dt.$$

9.7 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 9.10 *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une application de $A \times I$ vers $\mathbb{K}$ telle que :*
- *$\forall x \in A$ $f(x, .) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux,*
- *$\forall t \in I$ $f(., t) : x \mapsto f(x,t)$ est contine,*
- *il existe une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable telle que*

$$\forall (x,t) \in J \times I \quad |f(x,t) \leq |\phi(t)|.$$

Alors la fonction F

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\, dt$$

est définie et continue sur A.

Ce résultat découle immédiatementdu théorème de convergence dominée et de la caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite.

Dans la pratique il ne sera pas toujours possible d'obtenir une majoratin de f valable sur $A \times I$. Mais la continuité étant une notion locale il suffira d'obtenir cette majoration sur $V_\alpha \times I$ pour chaque élément d'une famille $V_\alpha$de parties de A telle que pour tout x de A il existe une α tel que V_α soit un voisinage de x (relativement à A).

Si $A = \mathbb{R}$ on prendra $V_\alpha = [-\alpha, \alpha]$ (traditionnellement $[-A, A]$ car le A qui désigne ici le domaine des x s'appelle $\mathbb{R}$ dans le sujet).

Si $A = \mathbb{R}^{*+}$ on prendra $V(= V_{(a,b)}) = [a, b]$, $0 < a < b$. Parfois $V(= V_{(a)}) = [a, +\infty[$ suffit pour majorer et permet d'utiliser le théorème de convergence dominée étendu pour passer à la limite.

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ les V_α seront souvent un produit de segments.

Exemple 9.6

Transformée de Laplace

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Transformée de Fourier

$$\hat{f}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt.$$

9.8 Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 9.11 *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point, f une fonction définie sur $J_t imes I$. On suppose :*

- *$\forall x$ in J $f(x, .) : t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux (pour tout x de J f est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable) et* **intégrable**.
- *$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sue $J \times I$, est continue par poceaux par rapport à la dexième variable, est contine par rapport à la première variable.*
- *Il existe une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable, telle que*

$$\forall (x, t) \in J \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t).$$

Alors

$$F : x \mapsto \int_I f(x, t)\, dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$\forall x_i n J \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt.$$

La démonstration est une extension de celle de la continuité. On a déjà la continuité, de plus le thèoreme sur les intégrales sur un segment dépendant d'un paramètre affirme que u_p est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u_p'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$. La condition de majoration de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ permet de prouver que $(u'p)$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$. Puisque $(u_p(x_0))$ converge pour un point quelconque de A, le théorème sur la dérivation de la limite s'applique.

On peut étendre le résultat aux fonctions de classe C^k, l'hypothèse sera que f admet sur $A \times I$ des dérivées partielles par rapport x, jusqu'à l'ordre k, vérifiant les conditions du théorème.

Exemple 9.7 *La fonction* Γ.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

9.9 Exercices

Exercice 9.1 (Les théorèmes de la moyenne)
1) (Le premier théorème de la moyenne) Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose f intégrable, par exemple continue par morceaux, et de signe constant. On suppose g continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe un c de $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = g(c) \int_a^b f(t)\, dt \quad .$$

2) (Le deuxième théorème de la moyenne) Soient f et g deux fonctions definies sur l'intervalle $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose f continue sur $[a,b]$. On suppose g de classe C^1 sur $[a,b]$ et monotone. Montrer qu'il existe un c de $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = g(a) \int_a^c f(t)\, dt + g(b) \int_c^b f(t)\, dt \quad .$$

Indication : On pourra introduire une primitive de f.

Exercice 9.2 *Soit $A : I \to M_p(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\exp A : t \mapsto \exp A(t)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*