Chapitre 8

Fonction vectorielles

Dans ce chapitre toutes les fonctions sont à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans tout ce chapitre les intervalles sont supposés d'intérieur non vide. I et J désignent deux tels intervalles, même quand on oublie de le dire.

On remarquera que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est aussi un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, de dimension finie sur $\mathbb{R}$ si E est de dimension finie sur $\mathbb{C}$ (et on a $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$). De même toute application $\mathbb{C}$-linéaire est aussi $\mathbb{R}$-linéaire. On verra que dans ce qui suit seule importe la $\mathbb{R}$-linéarité, qui est impliquée par la $\mathbb{C}$-linéarité.

8.1 Dérivation

8.1.1 Dérivabilité en un point

Définition 8.1 *Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, vers un e.v.n de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit x un point de A. f est dite dérivable en x si la fonction g définie sur $I - \{x\}$ par $g(y) = \dfrac{1}{y-x}.(f(y) - f(x))$ admet une limite en x. Cette limite se note $f'(x)$.*

Proposition 8.1 *Une fonction f est dérivable en x si et seulement si elle admet en x un développement limité à l'ordre 1, c'est-à-dire si et seulement si :*

$$\exists A \in E \quad f(y) = f(x) + (y-x)A + \circ(y-x).$$

A est unique et vaut $f'(x)$.

Si $f : I \to E$ représente le mouvement d'un point matériel M dans l'espace E et si elle est dérivable en t_0, alors on dit que le point matériel admet à l'instant t_0 une vitesse instantanée $\overrightarrow{V} = f'(t_0)$.

8.1.2 Dérivée à droite, à gauche

Définition 8.2 *Si $f_d = f_{|[x,+\infty[\cap I}$ est dérivable en x, on dit que f admet une dérivée à droite en x. Elle se note $f'_d(x)$ et est égale à*

$$f'_d(x) = (f_d)'(x) = \lim_{y \to x, y > x} \frac{1}{y-x}(f(y) - f(x)).$$

On définit de même la notion de dérivée à gauche en x (notée $f'_g(x)$).

8.1.3 Dérivée

Définition 8.3 *Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I. La fonction dérivée est alors la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.*

Notation : la dérivée d'une fonction f peut être notée f', $\mathrm{D}f$, $\frac{df}{dx}$.

Remarque 8.1 *On pourra parler de la dérivée de f, même si f est définie sur une réunion d'intervalles vraiments disjoints (c'est-à-dire dont la réunion deux à deux n'est jamais un intervalle). C'est la fonction dont la la restriction à chacun de ces intervalles est la dérivée de la restriction à cet intervalle. On pourra parler de la dérivée d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par exemple. Mais on fera attention que par exemple si $f(x) = |x|$ alors f est dérivable sur les deux intervalles disjoints $]-\infty, 0[$ et $[0, +\infty[$ mais pas sur leur réunion.*

8.1.4 Usage de coordonnées

Proposition 8.2 *Soit $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Soit f une fonction de l'intervalle I vers E et $(f_1, \dots, f_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est dérivable si et seulement si chacune des f_i l'est et dans ce cas*

$$f' = f_1'e_1 + \cdots + f_n'e_n.$$

Le cas particulier des fonctions à valeurs complexes mérite d'être retenu :

Proposition 8.3 *Une fonction f à valeurs complexes est dérivable si et seulement si $\overline{f}$ l'est, ou si et seulement si $\mathcal{R}\mathrm{e}\, f$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}\, f$ le sont. Dans ce cas :*

$$D(\overline{f}) = \overline{D(f)} \text{ et } Df = D(\mathcal{R}\mathrm{e}\, f) + iD(\mathcal{I}\mathrm{m}\, f).$$

8.2 Opérations sur les fonctions dérivables

8.2.1 Linéarité

Proposition 8.4 *L'ensemble des fonctions dérivables sur A à valeurs dans E est un espace vectoriel et le passage à la dérivée est une application linéaire.*

Proposition 8.5 *Soit f une application dérivable sur l'intervalle I, à valeurs dans E et L une application linéaire de E vers F. Alors $L \circ f$ est dérivable et $D(L \circ f) = L \circ D(f)$.*

Exemple 8.1 *Si $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ est dérivable alors $\phi = \mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\, \circ A$ est dérivable et $(\mathrm{tr}\,(A))' = \mathrm{tr}\,(A')$.*

8.2.2 Expression de la dérivée d'une fonction de la forme $B(f, g)$, où B est une application bilinéaire

Théorème 8.1 *Soit f une application de $A \subset \mathbb{R}$ vers un e.v.n de dimension finie E, soit g une application dérivable de A vers un e.v.n de dimension finie F. Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ vers G où G est un e.v.n de dimension finie. Alors si f et g sont dérivables sur A, il en est de même de $B(f, g)$, et l'on a : $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.*

Corollaire 8.1 *L'ensemble des applications numériques dérivables sur A est une algèbre et de plus : $(fg)' = f'g + fg'$.*

Exemple 8.2 *On peut utiliser le théorème pour dériver un produit scalaire de fonctions, le carré de la norme, ou un produit vectoriel.*

Application : vecteur vitesse d'un mouvement de norme constante.

Application : la normale en M à une ellipse est la bissectrice des droites joignant M aux deux foyers.

Exemple 8.3 *Un exemple où E est différent de F est : $E = \mathbb{K}$ $F = F$; on peut en déduire que si ϕ est une fonction numérique et f une fonction vectorielle, dérivables sur A, ϕf est dérivable sur A avec : $(\phi f)' = \phi' f + \phi f'$.*

8.2.3 Composition

Théorème 8.2 *Soit φ une fonction dérivable de I vers $\mathbb{R}$, soit g une application dérivable de J vers un e.v.n E. On suppose $\varphi(I) \subset J$, alors $g \circ \varphi$ est dérivable sur A. On a : $(g \circ \varphi)' = f'\,(g' \circ \varphi)$. C'est à dire :*

$$\forall x \in I \ (g \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x).g'(\varphi(x)).$$

8.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

8.3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 8.4 *Une fonction est dite de classe C^0 si elle est continue, et de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, si elle est dérivable et si sa dérivée est de classe C^{k-1}.*

Notation : Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, on appelle dérivée k-ième de f la dérivée de sa dérivée $(k-1)$-ième si $k \geq 1$, et la fonction elle-même si $k = 0$. On la note $f^{(k)}$, ou $D^k f$ ou $\frac{d^k f}{dx^k}$. On remarquera que cette définition reste valable, même si on ne suppose pas f de classe $\mathcal{C}^k$, elle permet de définir les fonctions k fois dérivables et la dérivée k-ième d'une fonction k fois dérivable.

Exemple 8.4 *Si une fonction f est deux fois dérivable et représente le mouvement d'un point matériel, le vecteur $f''(t_0)$ est l'accélération de f à l'instant t_0.*

Définition 8.5 *Une fonction qui est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k est dite de classe C^∞.*

Proposition 8.6 *L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur l'intervalle I, à valeurs dans le même espace E, est un espace vectoriel noté $\mathcal{C}^k(I, E)$.*

Remarque : si E est $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, on écrira plus simplement : $\mathcal{C}^k(I)$.

8.3.2 La formule de Leibniz

Théorème 8.3 *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, à valeurs dans des espaces F et G et B une application bilinéaire de $F \times G$ vers E. Alors $B(F, G)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et*

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i \, B(f^{(i)}, g^{(k-i)}).$$

Par application de ce théorème au produit de deux fonctions, on prouve immédiatement :

Proposition 8.7 *$\mathcal{C}^k(I)$ est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions numériques.*

8.3.3 Composition

Théorème 8.4 *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de l'intervalle I vers l'intervalle $\mathbb{R}$, soit g une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ vers E. On suppose $\varphi(I) \subset J$, alors $g \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A.*

8.4 Intégration sur un segment

8.4.1 Définition de l'intégrale

Définition 8.6 *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans un epace de dimension finie E. Soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une base de E. On peut écrire $f = \sum_{k=1}^n f_k \epsilon_k$, et chaque f_k est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. On définie l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :*

$$\int_{[a,b]} f = \left(\int_{[a,b]} f_1\right)\epsilon_1 + \cdots + \left(\int_{[a,b]} f_n\right)\epsilon_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{[a,b]} f_k\right)\epsilon_k.$$

Exercice 1: *En utilisant la formule de changement de base, montrer que cette définition est cohérente, c'est-à-dire que le membre de droite ne dépend pas de la base choisie*

8.4.2 Relation de Chasles

On étend la définition du symbole $\int_a^b f(t)dt$ par $\int_a^A f(t)dt = 0$ et $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.
Avec cette convention on a :

Théorème 8.5 *Si f est une application f de l'intervalle I vers E continue par morceaux, si (a, b et c sont dans I alors : :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

8.4.3 Inégalité triangulaire

Proposition 8.8 *L'intégrale des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est une application linéaire continue pour la norme de la convergence uniforme. Plus précisément*

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|.$$

8.4.4 Sommes de Riemann

8.4.4.1 Définition

Définition 8.7 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$. Soit $(a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle somme de Riemann une somme du type*

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i), \text{ où } \forall i\ \xi_i \in [a_i, a_{i+1}].$$

Exemple : Les deux sommes de Riemann le plus usuellement associées à f sont les sommes :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}) \text{ et } \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}).$$

8.4.4.2 Convergence de ces sommes

Théorème 8.6 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Lorsque le pas des éléments d'une suite de subdivisons tend vers zéro les sommes de Riemann associées à ces subdivisions tendent vers l'intégrale de f sur $[a,b]$.*

Corollaire 8.2 *Si f est continue sur $[a,b]$ on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

8.5 Intégrale fonction de la borne supérieure

8.5.1 Dérivation

8.5.2 Inégalité des accroissements finis

Inégalité des accroissements finis

Théorème 8.7 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe un réel M tel que :*

$$\forall x \in]a,b[\ \|f'(x)\| \leq M.$$

Alors :

$$\|f(b)-f(a)\| \leq M(b-a).$$

Plus précisément, s'il existe une fonction g continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b[$, telle que

$$\forall x \in]a,b[\ \|f'(x)\| \leq g'(x).$$

Alors :

$$\|f(b)-f(a)\| \leq M(g(b)-g(a)).$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la restriction de f à un intervalle contenu dans $[a,b]$, on prouve, sous les mêmes hypothèses :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \ \|f(x)-f(y)\| \leq M|x-y|.$$

8.6 Formules de Taylor

8.6.1 Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1}

Théorème 8.8 *Soit f une fonction de classe C^p et de classe C^{p+1} par morceaux sur un intervalle $[a,b]$. On peut écrire :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)dt.$$

Remarque : Cette formule s'étend au cas où $b \leq a$.

8.6.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 8.9 *Soit f une fonction de classe C^p et de classe C^{p+1} par morceaux sur I, à valeurs dans un espace de Banach, soient a et b deux points de I. On a la majoration :*

$$\left\| f(b) - \left\{ f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) \right\} \right\| \leq \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{t \in [\min(a,b), \max[a,b]]} \| f^{(p+1)}(t) \| \quad .$$

Remarque : Cette formule s'étend au cas où $b \leq a$, en remplaçant $(b-a)$ par $|b-a|$. Remarque : Lorsque l'on prend la borne supérieure, ce n'est que sur l'intervalle privé de l'ensemble fini des points où la dérivée d'ordre $(p+1)$ n'existe pas.

8.6.3 Théorème de Taylor-Young

Théorème 8.10 *Soit f une fonction p fois dérivable en un point a d'un intervalle I. On peut écrire, au voisinage de ce point :*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \circ((x-a)^p).$$

8.7 Arcs paramétrés

8.7.1 Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$

8.7.2 Exemples simples d'arcs paramétrées