Chauffe Mathématiques 2019 MP*2

ABITBOUL Yohan

Ex 1: *CCS 2018*
Soit q une fonction 2π-périodique, continue, de moyenne nulle, soit y_n une solution de $y''(t)+(1-q(nt))y(t)=0$, $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.
1) On pose $X_n : t \mapsto (y_n(t), y_n'(t))$. Montrer que

$$< X_n(t)|X_n'(t) > \leq \frac{1}{2}|q_n(t)|\|X_n(t)\|^2.$$

2) Soit $T>0$, montrer qu'il existe M dans $\mathbb{R}^+$ indépendant de n tel que M majore $|y_n|$ et $|y_n'|$ sur $[0,T]$.
3) Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,T]$.

Ex 2: *CCS 2018*
1)
   a) Coder une fonction de paramètre P, M (polynôme, matrice) qui renvoie $P(M)$.
   b) Essayer avec $P = 1+X+X^2$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comparer $P(M)$ et $(I_3-M)^{-1}$.
   c) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $(P(A))^2$ avec $P = 1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2$. Relier A et $(P(A))^2$.
   d) Prouver ce résultat pour une matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   e) Qu'en est-il pour une matrice nilpotente 3×3 quelconque.

2) Soit P_n le polynôme tel que, au voisinage de 0,

$$\sqrt{1+x} = P_{n-1} + \circ(x^{n-1}).$$

   a) Déterminer P_3.
   b) Si A est une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$, comparer $(P_n(A))^2$ et A.

3) Il restait beaucoup de questions.

Ex 3: *CCM 2018*
Soit E un espace euclidien, u dans $L(E)$ symétrique. On pose

$$f : x \mapsto \|u(x)\|^2 - (u(x)|x)^2.$$

1) f est-elle majorée ? minorée ?
2) Donner alors les bornes inférieues et/ou supérieures de f.

Ex 4: *CCM 2018*
Un sac contient n cordes $n \geq 1$. A chaque étape on prend deux extrémités qu'on nouent entre elles. Les deux cordes formes une nouvelle corde ou une boucle.
1) Loi du nombre de boucles à la première étape.
2) Nombre moyen de boucles au bout de k étapes.

AMY Oummou Seleme

Ex 5: *Petites Mines 2018*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$$

1) Montrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer un équivalent de f lorsque x tend vers $+\infty$.
3) Déterminer un développement à l'ordre 2 en 0.

Ex 6: *Petites Mines 2018*

$$M=\begin{pmatrix}A&A&A\\A&A&A\\A&A&A\end{pmatrix},\quad A\in M_n(\mathbb{C}).$$

Démontrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est aussi.

Ex 7: *CCP 2018*
On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires, l'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne dont elle provient. Si la boule tirée est blanche alors le tirage suivant se fera dans l'urne U_1, sinon il se fera dans l'urne U_2.
Pour tout $n\geq 1$ on note B_n l'évènement « la boule tirée au n-ième tirage est blanche »et on note $p_n=\mathbb{P}(B_n)$.
1) Calculer p_1.
2) Prouver que pour tout $n\geq 1$ $p_{n+1}=-\dfrac{6}{35}p_n+\dfrac{4}{7}$.
3) En déduire la valeur de p_n pour tout n.

Ex 8: *CCP 2018*
Soit

$$A=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0&1\\ \vdots&&&\vdots&2\\ \vdots&&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&\cdots&0&n-1\\ 1&2&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R}).$$

1) Déterminer le rang de A.
2) Déterminer la trace de A^2.
3) Déterminer les valeurs propres de A.

ATTAL Loïse

Ex 9: *CCM 2018*
Soit $p>0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, mutuellement indépendantes, de même loi et admettant une espérance.
1) Montrer que $\ln(X_1)$ admet une espérance.
2) Si $p>e^{E(\ln(X_1))}$, montrer que $\mathbb{P}(\prod_{k=1}^{n}X_k>p^n)$ tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$.
3) Si $p<e^{E(\ln(X_1))}$ que peut-on dire de $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\prod_{k=1}^{n}X_k>p^n)$?

Ex 10: *CCM 2018*
Soit p dans $\mathbb{N}^*$ et $S:x\mapsto\frac{\operatorname{sh}x}{x^p}$, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.
1) Etablir une équation différentielle à coefficients polynomiaux vérifiée par S.
2) Résoudre cette équation.

Ex 11: *CCS 2018*
Soit $E=\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n. On dit que $p\in\mathcal{P}_n$ est une meilleure approximation de f (de E) si

$$\|f-p\|=\inf_{q\in\mathcal{P}_n}\|f-q\|.$$

1) Montrer l'existence d'une meilleure approximation.
2) Soit p dans $\mathcal{P}_n$ tel qu'il existe $n+2$ points $-1\leq x_0<\cdots<x_{n+1}\leq 1$ avec, pour tout k, $f(x_k)-p(x_k)=(-1)^k\|f-p\|$. Montrer que p est une meilleure approximation.
3) On pose, pour n entier, $T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$. Soit $f=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}T_{3^i}$. Montrer que f est définie et continue sur $[-1,1]$. (Il restait encore une partie à cette question)

Ex 12: *CCS 2018*
Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$ on pose :

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1)
   a) Coder une fonction $M(n, t)$ qui renvoie $M_n(t)$.
   b) Justifier que $M_n(t)$ est diagonalisable et coder une fonction $S(n, t)$ qui renvoie les valeurs propres de $M_n(t)$ dans l'ordre croissant. Tester sur $M_4(2)$.
   c) Tracer le graphe de $t \mapsto \det(M_n(t))$ pour $n \in [3, 10]$. Conjecture sur le comportement de $\det M_n(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
   d) Prouver cette conjecture.

2) On prend $n = 3$ et on appelle $\alpha(t) \leq \beta(t) \leq \gamma(t)$ les valeurs propres de $M_3(t)$.
   a) Déterminer $S(3, t)$ pour $t \in \{10, 100, 1000, 10000, 100000\}$. Conjecture sur les comportements asymptotiques de α, β et γ.
   b) Proposer un développement asymptotique de $\gamma(t)$ quand $t \to +\infty$.
   c) Tracer les graphes de α, β et γ sur un même graphe. Conjecture sur la monotonie et la symétrie des graphes.
   d) Soit χ_t le polynôme caractéristique de $M_3(t)$. Calculer χ_t. Limite de $\chi_t(\lambda)$ quand $t \to +\infty$, en fonction de λ dans $\mathbb{R}$.

3) Il restait une ou deux questions portant sur le développement asymptotique de $\gamma(t)$.

AUDOLY Vincent

Ex 13: *CCS 2018*
On se place dans $\mathbb{R}^d$, muni de la norme euclidienne $\|.\|$
On pose $B_d = \{u \in \mathbb{R}^d ; \|u\| \leq 1\}$.
Pour $f \in L(\mathbb{R}^d)$ on définit $N(f) = \sup\{\|f(u)\| ; u \in B_d\}$.
1) Montrer que N est une norme et calculer $N(f)$ si f est un projecteur orthogonal non nul.
2) Soit f un projecteur non nul, montrer que $N(f) = 1$ si et seulement si f est un projecteur orthogonal.

Ex 14: *CCS 2018*
(Exercice bonus) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels tendant vers $+\infty$, avec de plus $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que $\{u_n - v_k ; (n, k) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Ex 15: *CCS 2018*
On se place dans le groupe multiplicatif $GL_2(\mathbb{Z})$. On note $M_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$. De même $GL_2(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont les inverses sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
1) Ecrire une fontion `ordre(A)` renvoyant l'ordre de A si il est strictement inférieur à 100, 0 sinon.
2)
   a) Ecrire une fonction `A(n)` renvoyant la matrice $\begin{pmatrix} n & -n^2 + n - 1 \\ 1 & -n + 1 \end{pmatrix}$. Calculer l'ordre de $A(n)$ pour plusieurs valeurs de n.
   b) Démontrer cette conjecture.

3) Soit A dans $M_2(\mathbb{Z})$. Montrer que A appartient à $GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.
4) Montrer que si A est d'ordre fini alors ses valeurs propres sont de module 1.
5) Montrer que si $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ avec $\det A = -1$, alors A est d'ordre fini si et seulement si $A^2 = I_2$.
6) Il restait d'autres questions, peut-être montrer que si $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ est d'ordre fini, alors $A^{12} = I_2$.

Ex 16: *TPE 2018*
Justifier l'existence et calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) \ln(\tan x) \, dx.$$

Ex 17: *TPE 2018*

Soit E un espace euclidien de dimension 3. Soit (u,v) une famille libre de vecteurs de E et

$$\begin{array}{rcccl} f & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & < u,x > v + < v,x > u \end{array}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique.
2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Ex 18: *CCM 2018*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} x^n$.

Ex 19: *CCM 2018*

Soit E un espace euclidien et f un endomrphisme de E tel que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x.

1) Montrer l'existence de f^* tel que

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad < f(x), y > = < x, f^*(y) > .$$

2) Montrer que $f(x) = x \Rightarrow f^*(x) = x$.
3) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.
4) Oubliée, peut-être déterminer la limite de

$$\frac{1}{n+1}(\mathrm{Id}_E + f + \cdots + f^n).$$

AZEMA Célia

Ex 20: *CCS 2018*

Soit n dans $\mathbb{N}^*$, soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi :

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2},\ X_i(\Omega) = \{-1, 1\}.(\text{note}^{1})$$

On définit deux variables aléatoires

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_n & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \text{avec } S_0 = 0 \\ Z_n & = & \sup\{k \in [0,n]; S_k = 0\} \end{array}\right.$$

On rappelle(note[2]), sans que la justification soit demandée, la relation

$$\frac{k}{n}\binom{2n}{n+k} = \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}.$$

1) Ecrire un script qui permet de tracer S_n en fonction de n. Effectuer plusieurs tracés.
2) Tracer $\mathbb{P}(\frac{Z_n}{n} \leq x)$ en fonction de x, pour $n = 1000$. Reconnaître une fonction $f(\sqrt{x})$ et déterminer f.
3) Montrer que S_n ne peut s'annuler que pour n pair.
4) On pose $Y_n = \frac{n+S_n}{2}$. Déterminer la loi de S_n. En déduire $E(S_n)$.
5) Montrer que $\frac{1}{2n}E(|S_{2n}|) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.
6) Suite oubliée.

Ex 21: *CCM 2018*

$\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Déterminer les fonctions ϕ polynomiales (en les coefficients) de $M_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$, non constantes, telles que

$$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad \phi(AB) = \phi(A)\phi(B).$$

On démontrera tout d'abord que $\phi(0) = 0$ et $\phi(I_n) = 1$, puis $\phi(A) = 0$ si et seulement si A est non inversible. Utiliser ensuite la méthode du pivot pour montrer que ϕ est une fonction du déterminant.(note[3]).

---

1. On parle de variables de Rademacher.
2. « On donne »serait plus approprié.
3. L'exercice a été interrompu avant la fin. Voici quelques indications pour conclure :
   — Montrer que, si $i \neq j$, $I_n + \lambda E_{i,j}$ est semblable à $I_n + 2\lambda E_{i,j} = (I_n + \lambda E_{i,j})^2$. En déduire la valeur de $\phi(I_n + \lambda E_{i,j})$. Couplé à la méthode du pivot ce résultat vous permettra de montrer que $\phi = f \circ \det$.
   — Montrer que f est polynomiale (considérer des matrices dont le déterminant est un des coefficients).
   — Trouver tous les polynômes P tels que $P(xy) = P(x)P(y)$ pour x et y non nuls.
   — Conclure.

Ex 22: *CCS 2018*
1) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. En déduire que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R})\ \exists U \in O_n(\mathbb{R})\ \forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}) \quad \|M-U\| \leq \|M-\Omega\|.$$

(On a muni $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $< A,B >= \mathrm{tr}\,({}^tAB)$ et de la norme associée.
2) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$ et U comme ci-dessus. Soit A une matrice antisymétrique.
Soit M_1 dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}) \quad \|M_1 - I_n\| \leq \|M-\Omega\|.$$

Montrer que

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & s & \mapsto \|M_1 - \exp(sA)\| \end{array}$$

admet un minimum en 0. En déduire que M_1 est symétrique.
En déduire, avec les notations précédentes, que $U^{-1}M$ est symétrique.
3) Oubliée.

Ex 23: *CCM 2018*
Calculer

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)\,dx.$$

Ex 24: *X 2018*
1) Soit P dans $[R[X]$ de degré n et unitaire. On suppose que tous les zéros de P sont à parties réelles négatives. Montrer que tous les coefficients de P sont positifs.
2) Soit P dans $\mathbb{C}[X]$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^{*+}$ $P(x)$ soit dans $\mathbb{R}^{*+}$. Montrer que P est dans $\mathbb{R}[X]$, puis qu'il existe S et T dans $\mathbb{R}[X]$ à coefficients positifs, tels que $P = \frac{S}{T}$.

Ex 25: *X 2018*
Soit $A_n = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B_n = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux familles de variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{P}(a_{i,j}=1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(a_{i,j}=0) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(b_{i,j}=1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(b_{i,j}=-1) = \frac{1}{2}$. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n$ est inversible) et $q_n = \mathbb{P}(B_n$ est inversible).
1) Montrer que $p_n = q_{n+1}$.
2) Etablir $\forall n \in \mathbb{N}\ p_n \geq \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$.

BALP Christopher

Ex 26: *CCM 2018*
Soit E un espace euclidien. On considère H et K deux hyperplans de E et s_H et s_K les symétries orthogonales par rapport à ces hyperplans. Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H^\perp \subset K$.

Ex 27: *CCM 2018*
Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On considère une partie G finie de $GL_n(\mathbb{R})$, contenant I_n et stable par le produit matriciel. On pose :

$$M = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)}\sum_{g\in G} g \text{ et } F = \bigcap_{g\in G}\mathrm{Ker}\,(g-I_n).$$

1) Montrer que $(G,\times)$ est un groupe.
2) Exprimer M^2 en fonction de M.
3) Montrer que $\mathrm{Im}\,(M) = F$.
4) En déduire une expression de $(\mathrm{Card}\,G)\times(\dim F)$.

Ex 28: *CCM 2018*
Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + \frac{(-1)^n}{(\ln n)^\beta}},$$

définie pour n assez grand et où $\beta \in \mathbb{R}^*$.

Ex 29: *Navale 2018*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\,dt$ converge.
Soit $x > a$. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$ dans les cas suivants :

a) f est positive,
b) f est négative,
c) f n'est pas de signe constant.

Ex 30: *Navale 2018*
(Note[4].) Soit M dans $S_n(\mathbb{R})$. On suppose que M admet une valeur propre λ de multiplicité p.
1) Montrer que toute matrice extraite, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de mêmes indices, d'ordre strictement supérieur à $n - p$ admet λ comme valeur propre.
2) Etudier la réciproque.

Ex 31: *Navale 2018*
Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique inversible, avec $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{*+}$. On pose :

$$F = \{< u(x)|x > . < u^{-1}(x)|x >; x \in S(0,1)\}.$$

En justifiant au préalable leurs existences, calculer la borne supérieure et la borne inférieure de F.

Ex 32: *CCP 2018*
Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite qui converge vers 0. Elle est donc bornée.
1) Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\epsilon_n.$$

On considère la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2\ u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

On admet que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ |\ln(u_{2k+1})| - |\ln(u_{2k})| = -\ln\left(1 + \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}\right).$$

2)
a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2}$$

et en déduire $\forall k \in \mathbb{N}^*\ |\ln(u_{2k+1})| - |\ln(u_{2k})| > 0$.
b) La suite $(\ln(u_n))_{n\geq 2}$ est-elle alternée ? Vérifie-t-elle les condition du critère de Leibniz ?

3) Donner le développement à l'ordre 3 de $\ln(1 + x)$.
4) Donner la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \ln(u_n)$.

Ex 33: *CCP 2018*
On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que A est diagonalisable :
a) Sans calcul,
b) en calculant $\det(\lambda I_n - A)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et en déterminant les sous-espaces propres,
c) en utilisant le rang de la matrice,
d) en calculant A^2.

2) On considère A comme la matrice canoniquement assoiée à un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire usuel). Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

4. Merci à Ahmed Ben SAOUD pour avoir trouvé quel était l'hypothèse qui rendait cet exercice intéressant

Ex 34: *Saint-Cyr 2018*

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^n}\, dt$.

1) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

2) Déterminer un équivalent de I_n en $+\infty$, en utilisant $c = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$.

3) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} I_n z^n$ et étudier la convergence en R et $-R$.

Ex 35: *Saint-Cyr 2018*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, M) \in M_n(\mathbb{R})^2$ tels que

$$M^2 + M + I_n = 0 \text{ et } A^2 = M.$$

1) Montrer que M est inversible.

2) M est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, dans $M_n(\mathbb{C})$?

3) Montrer que n est pair et calculer la trace et le déterminant de M.

4) A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$?

Ex 36: *Saint-Cyr 2018*

Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ on pose

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\, dt.$$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0. On note f la fonction prolongée.

2) Montrer que f admet un développement en série entère autour de 0.

BARTEAU Alexandre

Ex 37: *CCM 2018*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.

1) Si $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge alors $\sum_{n\geq 1} a_n$ aussi.

2) Prouver la réciproque.

3) Montrer que si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge alors

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n} + 1.$$

4) Si $b_n = 1 + \circ(\frac{1}{\ln(n)})$, comparer la nature des deux séries $\sum_{n\geq 1} an$ et $\sum_{n\geq 1} a_n^{b_n}$.

Ex 38: *CCM 2018*

Soit A dans $M_n(\mathbb{C})$, diagonalisable.

1) Soit P dans $\mathbb{C}[X]$ de degré au moins 1. Montrer qu'il existe M dans $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P(M)$.

2) Soit N dans $M_n(\mathbb{C})$ telle que $AN = NA$ et toutes les valeurs propres de N sont simples.

a) Montrer que A et N sont simultanément diagonalisables.

b) Montrer qu'il existe P dans $\mathbb{C}[x]$ tel que $A = P(N)$.

Ex 39: *CCS 2018*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n au moins 1. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ dans E^p. On note $G(x_1, \ldots, x_p) = (< x_i | x_j >)_{1\leq i,j\leq p}$ (matrice de Gram du système de vecteurs).

1) Montrer qu'il existe une matrice M telle que ${}^tMM = G(x_1, \ldots, x_p) = (< x_i|x_j >)_{1\leq i,j\leq p}$ (note du rédacteur :le domaine de M n'est pas clairement précisé. Une remarque de l'étudiant me fait opter pour $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.)

2) Soit B dans $M_p(\mathbb{R})$. Montrer que B est une matrice de Gram $G(x_1, \ldots, x_p)$ si et seulement si B est symétrique, à valeurs propres positives et de rang inférieur ou égal à n.

3) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ dans E^n. Montrer que $\mathrm{Sp}(G(u_1, \ldots, u_n)) \subset \{0, 1\}$ si et seulement si il existe un projecteur orthogonal π et une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que pour tout i $\pi(e_i) = u_i$.

Ex 40: *CCS 2018*
On définit f sur $\mathbb{R}^{*+} \setminus \{1\}$ par $f(x) = x^{\frac{1}{1-\sqrt{x}}}$.
1) Justifiez que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Déterminer le comportement de f au voisinage de $+\infty$.
2) Tracer le graphe de f sur différents segments et conjecturer les limites de f en 0 et 1.
3) En vous servant de `Python`, conjecturer l'intégrabilité de $(1-f)^\alpha$ pour $\alpha \in \{1,2,3\}$.
4) Montrer que f est prolongeable en un fonction dérivable en 1, notée g. Donner $g(1)$ et $g'(1)$.
5) Pour quelles valeurs de k g est-elle de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{*+}$?
6) Il restait cinq autres questions.

BLEUSSE Elie

Ex 41: *ICNA 2018*
Soit f une fonction 1-périodique définie par $f(t) = t(1-4t^2)$ si $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
1) Tracer le graphe de f sur $[-2, 2]$.
2) Calculer $f(\frac{100}{3})$.
3) Pour n entier on pose $f_n(t) = \frac{1}{(n!)^2} f(n!\,t)$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement. En déduire que sa somme g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
4) Montrer que $g(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. A-t-on $g'(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

Ex 42: *ICNA 2018*
Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x' = -x + y + z - 1 \\ y' = x - y + z - 1 \\ z' = x + y - z - 1 \end{cases}$$

BOMBERAULT Julien

Ex 43: *CCS 2018*
Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ soit de rayon de convergence $+\infty$. Soit f sa somme.
1) Soit $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\,dt$.
2) Soit $R > 0$. On suppose f réelle sur le cercle centré en 0 de rayon R. Montrer que f est constante réelle sur $\mathbb{C}$.
3) On suppose maintenant que f est nulle sur un arc du même cercle. Montrer que f est nulle.
Indication : Poser $g(z) = f(z) f(ze^{\frac{2i\pi}{N}}) \cdots f(ze^{\frac{2i\pi(N-1)}{N}})$. Utiliser aussi (et démontrer) que si h est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini/non nul telle que pour tout $\epsilon > 0$ h s'annule en au moins un point de $]0, \epsilon[$ alors h est nulle (principe des zéros isolés).

Ex 44: *CCS 2018*
(Epreuve Python)Un sujet sur le lien entre les racines d'un polynôme P et celle de P' (théorème de Gauss-Lucas probablement) et les polynômes de matrices.

Ex 45: *CCM 2018*
$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, pour tout $f \in E$ et tout x de $[0,1]$ on pose $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,dt$.
1) Montrer que $T(f)$ est dans E si f est dans E.
2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Ex 46: *CCM 2018*
Soit A, B et C dans $M_2(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe α, β et γ non tous nuls tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ait une valeur propre double.
Indication : Poser $\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Ex 47: *CCM 2018*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de même loi. On pose $S_0 = 0$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n X_k$, $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = V(X_1)$. Pouver que
$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(S_n \leq n(m-\epsilon)) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

CHLIEH Reda

Ex 48: *ENS L 2018*
Soit n in $\mathbb{N}^*$. Si σ est dans S_n, on note c_σ le nombre de cycles dans sa décomposition en produit de cycles disjoints (en tenant compte des cycles de longueur 1).
Factoriser : $P_n = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) t^{c_\sigma}$.

Ex 49: *ENS RS 2018*
Soit M dans $GL_n(\mathbb{R})$. On appelle réseau associé à M l'ensemble $\Lambda = \{MV; V \in \mathbb{Z}^n\}$.
1) Montrer que Λ est un groupe (additif).
2) Montrer qu'il existe r tel que toute boule de rayon r contient au plus un élément de Λ, et qu'il existe R tel que toute boule de rayon R contient au moins un élément de Λ.

Ex 50: *ENS LPRS 2018*
Caractériser les $f : \mathbb{N} \to N$ telles que pour tout variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda > 0$, il existe un $\alpha_\lambda > 0$ tel que $f(X)$ suive une loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha_\lambda)$.

Ex 51: *ENS LPRS 2018*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continue telle que $\forall x > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x) = f(nx)$. Que dire de f ?

Ex 52: *CCM 2018*
Soit A dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (la définition en est rappelée). Montrer qu'il existe une unique matrice H de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $H^3 + H = A$.

Ex 53: *CCM 2018*
Soit (E, N) un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Montrer qu'il existe un segment de longueur maximale contenu dans K. On rappelle que le segment $[A, B]$ est $\{tA + (1-t)B; t \in [0, 1]\}$, sa longueur est $N(B - A)$

Ex 54: *CCM 2018*
Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B possèdent une valeur propre commune si et seulement si il existe P non nulle telle que $AP = PB$.

Ex 55: *CCS 2018*
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact de E et $g : K \to K$ une application 1-lipschitzienne.
On se propose de montrer que g est surjective si et seulement si c'est une isométrie.
1) On suppose que g est surjective. Soit $(x, y) \in K^2$, on choisit des antécédents x_n et y_n de x et y par g^n, pour n dans $\mathbb{N}$. On note (x', y') une valeur d'adhérence de $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $x - y$ est une valeur d'adhérence de $(g^n(x') - g^n(y'))_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Montrer que $\|g^n(x') - g^n(y')\|$ tend vers $\|x - y\|$ et en déduire que g est une isométrie.
3) Réciproque et contre-exemple si K est seulement borné (note [5]) .

Ex 56: *CCS 2018*
Soit k dans $\mathbb{N}$, non carré d'un entier.
1) Justifier l'existence de $((a_n), (b_n))$ dans $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ telles que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{k}$.
2) Explicitez deux telles suites et vérifier la convergence avec Python dans le cas $k = 7$.
Dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, soit Ω de coordonnées (a, b), M_1 de coordonnées (x_1, y_1) et M_2 de coordonnées (x_2, y_2).
3) En utilisant le déterminant exprimer $\sin(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M_2}})$ en fonction de $(a, b, x_1, y_1, x_2, y_2)$.
4) Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets sont dans $\mathbb{Z}^2$.
5) Un triangle est ϵ-équilatéral si ses sommets sont dans $\mathbb{Z}^2$ et la mesure de chacun de ses angles dans $[\frac{\pi}{3} - \epsilon, \frac{\pi}{3} + \epsilon]$. A l'aide de Python, trouver un triangle ϵ-equilatéral. Application pour $\epsilon = 10^{-10}$.
6) Montrer que pour tout ϵ il existe un triangle ϵ-équilatéral dont deux des sommets sont sur l'axe $y = 0$.
7) (perdue).

DENTAN Samuel

Ex 57: *CCS 2018*
1) Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A.
2) (Conjecturée par le dactylographe) A quelle condition sur A, $\mathrm{Com}(A)$ est elle diagonalisable ?

5. Il est possible de trouver un contre-exemple —c'est-à-dire une isométrie non surjective— où E est de dimension infinie, et un contre-exmple où E est de dimension finie.

Ex 58: *CCM 2018*
1) Résoudre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'équation différentielle

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

où $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$, $a_n\neq 0$.
2) A quelle condition toutes les solutions sont elles bornées ?

Ex 59: *CCM 2018*
1) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2+a_3 & \cdots & a_n+a_1 \\ a_1^2+a_2^2 & a_2^2+a_3^2 & \cdots & a_n^2+a_1^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_1^n+a_2^n & a_2^n+a_3^n & \cdots & a_n^n+a_1^n \end{vmatrix}$$

2) A quelle condition la matrice est-elle inversible ?

Ex 60: *CCS 2018*
1) On considère $(a_n)\in\mathbb{R}^n$, où $a_0\neq 0$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{R}^n}$ telle que $a_0b_0=1$ et $\forall n\geq 1\ \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k=0$.
Ecrire un programme donnant $(b_0,\dots,b_n)$ en fonction de $(a_0,\dots,a_n)$.
2) Appliquer le programme à la suite $(\frac{1}{(n+1)!})_{n\geq 0}$, pour $k\in[0,10]$. Conjecturer un résultat.
3) On suppose maintenant que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est de rayon de convergence non nul.
  a) Montrer qu'il existe q dans $\mathbb{R}^{*+}$ et M dans $\mathbb{R}^{*+}$ tels que pour tout n $|a_n|\leq Mq^n$.
  b) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad |b_n|\leq \frac{M}{|a_0|^2}q^n\left(1+\frac{M}{|a_0|}\right)^{n-1}.$$

  c) En déduire que $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ a un rayon de convergence non nul. Etablir en outre un lien entre $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

4) On pose $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$. Montrer que f est développable en série entière de rayon de convergence >0 et expliciter son DSE (note [6]).
5) Il restait une question.

Ex 61: *X 2018*
1) Soit σ dans S_n et $P_\sigma=(\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer $\det(I_n-P_\sigma)$.
2) Calculer $\det(I_n+P_\sigma)$.
3) Calculer $T_n=\sum_{\sigma\in S_n}\det(I_n+P_\sigma)$. L'examinateur propose d'établir et d'utiliser la relation $T_{n+1}=2T_n+n(n-1)T_{n-1}$.(Ou quelque chose de ressemblant).

Ex 62: *X 2018*
On note $\{y\}$ la partie fractionnaire de y, c'est-à-dire le nombre $y-E(y)$. Pour tout x dans $[0,1[$ on définit la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n(x)=\{2^n x\}$.
1) Déterminer les x tels que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique à partir d'un certain rang.
2) Trouver le cardinal de l'ensemble des x tels que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique de période p^3 où p est premier.
3) Trouver un x tel que $\{u_n(x); n\in\mathbb{N}$ soit dense dans $[0,1]$.

Ex 63: *ENS L 2018*
Déterminer la structure des sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$.
Indication : On pourra commencer par s'intéresser à la structure des sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$.

Ex 64: *ENS RS 2018*
Soit A dans $M_n(\mathbb{C})$, on pose $|||A|||_\infty=\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$
1) Montrer que $\rho(A)\leq |||A|||_\infty$, où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A.
2) Montrer que $|||A|||_\infty\leq \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}|A_{i,j}|$.
3) On suppose $|||A|||_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}|A_{i,j}|$. On admet aussi que $\lim\limits_{k\to+\infty}|||A|||_\infty^k=\rho(A)$. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $0\leq A\leq B$ (i.e. $0\leq A_{i,j}\leq B_{i,j}$ pour tout (i,j)). Montrer que $\rho(A)\leq\rho(B)$.
4) On suppose $0<A<B$. Montrer que $\rho(A)<\rho(B)$.

6. Seulement ses premiers termes. Le terme général ne possède pas d'expression simple. Il est lié aux nombres de Bernoulli.

Ex 65: *ENS P 2018*
$P = X^4 - 2X^2 + 9$. Décomposer P en irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}[X]$, p premier.
Indication : Pour $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}[X]$. Regarder si -1 et 2 sont des carrés.

Ex 66: *ENS P 2018*
Etudier la densité de $\{\{\ln(n!)\}; n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $[0, 1]$, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire du réel x.

Ex 67: *ENS LPRS 2018*
Caractériser les $f : \mathbb{N} \to N$ telles que pour tout variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda > 0$, il existe un $\alpha_\lambda > 0$ tel que $f(X)$ suive une loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha_\lambda)$.

Ex 68: *ENS LPRS 2018*
Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$, continue telle que

$$\forall x > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ f(x) = f(nx).$$

Que dire de f ?

FALQUE Kevin

Ex 69: *CCS 2018*
Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ scindés et unitaires. U est l'ensemble des polynômes de E n'admettant pas 0 comme racine.

1) Soit P dans E et k dans $\mathbb{N}^*$. Que dire du polynôme $X^k P$? Exprimer l'ensemble E à partir de l'ensemble U.
2) (Les items suivants doivent être traités à l'aide de `Python`.)
   a) Donner tous les polynômes de $U \cap \mathbb{R}_2[X]$.
   b) Donner tous les polynômes de U de degré 3.
   c) Existe-t-il dans U des polynômes de degré 4.
3) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $(\mathbb{R}^{*+})^n$, montrer que $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} \frac{x_i}{x_j} \ge n^2$.
4) Soit $\mathbb{P}$ dans U :

$$P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i = \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j).$$

Exprimer $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\alpha_i^2}{\alpha_j^2}$ à l'aide des coefficients de P.

5) Il restait des questions, mais la finalité était de trouver un majorant du degré des éléments de U.

GADJI Ahmath

Ex 70: *CCP 2018*
On note $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\}$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel.
2) Montrer que $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ définit une norme sur E.
3) Montrer que $\sum_{n\ge 0} \frac{u_n}{2^n}$ converge pour tout u de E.
4) On définit

$$\begin{array}{rccl} f & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & u & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \end{array}$$

Montrer que f est continue.

Ex 71: *CCP 2018*
Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1) Déterminer la loi de Y_n.
2) Espérance et variance de Y_n.
3) Y_i et Y_j, $i \ne j$, sont-elles indépendantes.
4) Il restait d'autres questions.

GARROUTY Mathieu

Ex 72: *ENS LPRS 2018*
Soit f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que pour tout polynôme P de degré au moins 2, $f \circ P$ est un polynôme. Montrer que f est un polynôme.

Ex 73: *ENS P 2018*
On se donne des carrés dont la somme des aires vaut au plus 1. peut-on les placer sans chevauchement dans un carré de taille 10×10, 3×3, $1{,}1 \times 1{,}1$?

Ex 74: *ENS L 2018*
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$, $< f|g >= \displaystyle\int_0^\pi f(\cos(\theta))g(\cos(\theta)\, d\theta$.
Si $f \in E$ $M_f : g \mapsto fg$, π_n est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_n[X]$ et finalement $A_n = \pi_n \circ (M_f)_{\mathbb{R}_n[X]}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Etudier le comportement de $\mathrm{tr}\,(A_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex 75: *ENS P 2018*
Soit X_n une variable aléatoire à valeur dans $[1, n] \cap \mathbb{N}$.
1) On suppose que $G_{X_n}(t) = E(t^{X_n})$ ne possède que des racines réelles. Que peut-on en déduire en termes de probabilités pour X_n ?
2) On suppose que $E(X_n)$ tend vers $+\infty$.
— Enoncer une loi (faible) des grands nombres pour la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.
— La démontrer.

Ex 76: *ENS LPRS 2018*
Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ des fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Quels sont les liens entre les affirmations :
a) $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.
b) $\exists (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \quad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\ \forall k\ y_k = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_k)$.

Ex 77: *ENS RS 2018*
On se donne une famille double $(u_{i,n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$. On suppose que $(u_{i,0})_{i\in\mathbb{Z}}$ est bornée. Soit (p,q) dans $\mathbb{N}^2$ et $(a_\ell)_{-p\leq \ell \leq q}$ une famille de réels positifs de somme 1. On suppose que

$$u_{j,n+1} = \sum_{\ell=-p}^{q} a_\ell u_{j+\ell,n}.$$

On pose $u_n = (u_{i,n})_{i\in\mathbb{Z}}$.
1) Montrer que $\|u_n\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$.
2) On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\sum_{\ell=-p}^{q} \ell a_\ell = -\lambda \text{ et } \sum_{\ell=-p}^{q} \ell^2 a_\ell = \lambda^2.$$

Que dire ?
3) Application : on considère u de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, à valeurs réelles solution de

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0.$$

On pose

$$\epsilon_{u,t,x} = u(t + \lambda\alpha, x) - \sum_{\ell=-p}^{q} a_\ell u(t + x\ell\alpha).$$

Condition pour que $\epsilon_{u,t,x} = \mathcal{O}(\alpha^3)$ (en fait $\epsilon''_{u,t,x} = \mathcal{O}(\alpha)$) ?

Ex 78: *CCS 2018*
E est un espace euclidien de dimension n, $(x_1, \ldots, x_p)$ sont des vecteurs de E. On note $G(x_1, \ldots, x_p) = (< x_i|x_j >)_{1\leq i,j\leq n}$, c'est la matrice de Gram de la famille de vecteurs.
1) Si M est la matrice des coordonnées des x_j dans une base orthonormale alors $G(x_1, \ldots, x_p) = {}^tMM$.
2) Une matrice A de $M_p(\mathbb{R})$ est la matrice de Gram d'une famille de vecteurs si et seulement si elle est symétrique, à valeurs propres positives et de rang inférieur ou égal à n.
3) Il restait deux questions.
4) (En fin d'oral) Enoncer le théorème de réduction des isométries.

Ex 79: *CCS 2018*
Soit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ si $n \geq 0$.
1) Ecrire une fonction `fibo(n)` calculant F_n avec une complexité en $\mathcal{O}(n)$.
2) On pose $\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7^{F_n F_{n+1}}}$. Justifier la convergence et donner une valeur approchée de α à 10^{-5} près.
3) Soit $0 < x \leq 1$, $a_n = \lfloor 1 + \frac{1}{x_n} \rfloor$, $x_{n+1} = a_n x_n - 1$, $x_0 = x$.
— Montrer que $0 < x_n \leq 1$, $(x_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $a_0 \geq 2$.
— Montrer que
$$x = \frac{1}{a_0} + \cdots + \frac{1}{a_0 \cdots a_n} + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}.$$
— Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $(a_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire.
— Montrer que α est irrationnel.

4) (hors-planche) Montrer que e est irrationnel.

Ex 80: *X 2018*
1) Soit S dans $S_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe S_+ et S_- dans $S_n^+(\mathbb{R})$ tels que $S = S_+ - S_-$, où $\mathrm{Supp}(S_+)$ et $\mathrm{Supp}(S_-)$ sont orthogonaux, $\mathrm{Supp}(S) = \oplus_{\lambda\neq 0} E_\lambda(S)$.
2) Montrer qu'il existe un unique C dans $S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $C^2 = S^2$. On note $C = |S|$. Exprimer C en fonction de S_+ et S_-.
3) $E = \{S \in S_n^+(\mathbb{R}); \mathrm{tr}\,(S) = 1\}$. On définit une distance sur E par $d(S,T) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(|S-T|)$ si S et T sont dans E.
— Cas $n = 2$.
— Montrer que
$$S = \Big\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-a & b \\ b & 1+a \end{pmatrix}; (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 \leq 1 \Big\}.$$
— Exprimer $d(S,T)$.
— Avec quel sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ E est-il en bijection ? Quelle norme faut-il choisir sur $\mathbb{R}^2$ pour que cette bijection soit une isométrie ?
— Cas général ($n \geq 3$). Montrer que
$$d(S,T) = \max\{\mathrm{tr}\,(P(S-T)); P \text{ matrice d'un projecteur orthogonal}\}.$$

Ex 81: *X 2018*
1) Soit $(x_i)_{1\leq i\leq N} \in (\mathbb{R}^n)^N$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in (\mathbb{R}^+)^N$ avec $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$.
Soit $x = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$. Montrer qu'il existe $p \leq n+1$, $(\mu_1, \ldots, \mu_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$ avec $\sum_{i=1}^p \mu_i = 1$, $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset [1, N]$ tels que $x = \sum_{j=1}^p \mu_j x_{i_j}$ (note [7]).
2) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, continue . Montrer qu'il existe $(t_1, \ldots, t_{n+1})$ dans $[0,1]^{n+1}$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ dans $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ avec $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et :
$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(t_i).$$
Pour $n = 2$ établir, avec les mêmes conventions :
$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lambda_1 f(t_1) + \lambda_2 f(t_2).$$

GAUDIN Solal

Ex 82: *2018*
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit u un vecteur unitaire de E, et f l'endomorphisme de E défini par $f(x) = u \wedge (u \wedge x)$.
1) Montrer que f est symétrique.
2) Donner ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

7. C'est le théorème de Carathéodory.

Ex 83: *2018*
Soit
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}.$$
1) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.
2) Donner une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.
3) Donner un équivalent de S en 0, puis en $+\infty$.

Ex 84: *2018*
On s'intéressse au groupe $G = \left(\dfrac{\mathbb{Z}}{32Z}\right)^*$.
1) Cardinal de G ? Ordre de $\overline{5}$? Ordre de $\overline{15}$.
2) A quel groupe additif G est-il isomorphe ?
3) Construire l'isomorphisme.

GAZULL Yann-Situ

Ex 85: *X 2018*
Soit $\mathcal{E} = \{-1, 0, 1\}[X]$ et $A = \{a \in \mathbb{R}; \exists P \in \ \ P(a) = 0\}$. Trouver l'adhérence de A.

Ex 86: *X 2018*
Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ on note $d(z, \mathbb{R}^+) = \inf_{x \in \mathbb{R}^+} |x - z|$.
1) Montrer que $d(z, \mathbb{R}^+)$ est un minimum.
2) Pour $p > 1$ on note $F_p(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{|x-z|^p}\, dx$. Montrer que :
$$\exists c_p \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \ F_p(z) \leq \frac{c_p}{(d(z, \mathbb{R}^+))^{p-1}}.$$

Ex 87: *ENS LPRS 2018*
Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels telle que pour tout n $0 < a_{n+1} < a_n < 1$ et soit $\alpha > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par :
$$u_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \geq 0 \ u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n).$$
Montrer qu'il existe un unique u_0 tel que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^{*+}$.

Ex 88: *ENS LPRS 2018*
(Fin d'oral) On considère une cloture d'un champ formée de 17 poteaux dont cinq sont pourris. Montrer qu'il existe 7 poteaux consécutifs dont trois d'entre eux sont pourris.

Ex 89: *CCM 2018*
Condition nécessaire et suffisante sur M dans $M_n(\mathbb{C})$ pour qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall z \in \mathbb{C}$ $(P - zM) \in GL_n(\mathbb{C})$.

Ex 90: *CCM 2018*
Soit f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
f admet-elle une primitive ?

Ex 91: *CCM 2018*
Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.
1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge.
2) Trouver un équivalent du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

Ex 92: *CCS 2018*
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
1) Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2) Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombre réels qui converge vers ℓ, alors
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \ell.$$
Remarque : l'examinateur tenait à la démonstration avec ϵ.
3) Trouver un équivalent de u_n.

Ex 93: *CCS 2018*
$\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
1)
a) On associe au polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ la matrice

$$\Gamma_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ecrire une fonction prenant P et renvoie Γ_P.
b) La fonction `poly` de `numpy` rennvoie le polynôme caractéristique d'une matrice avec les coefficients dans l'ordre décroissant. Ecrire une fonction renvoyant χ_{Γ_P}.
A.N. avec $P = (X-1)^5$ et $P = X^3 + X^2 + X + 1$.
Faire une conjecture.
c) Démontrer la conjecture.

2) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $(Z_1, \ldots, Z_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
a) Montrer que si $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\, {}^tZ_i = 0$ alors pour tout i $Z_i = 0$.
b) Montrer que si $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ alors $(X_i {}^tY_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$. Est-elle aussi une base de $M_n(\mathbb{C})$?

3) On veut montrer que si A et B sont dans $M_n(\mathbb{K})$ avec $\chi_A = \prod_{1\leq i \leq n}(X - \alpha_i)$ et $\chi_B = \prod_{1 \leq i \leq n}(X - \beta_i)$ et si on définit $\Phi_{A,B}$ dans $L(M_n(\mathbb{K})$ par

$$\Phi_{A,B}(M) = AM + M{}^tB,$$

alors

$$\chi_{\Phi_{A,B}} = \prod_{1 \leq i,j \leq n} (X - \alpha_i - \beta_j).$$

a) Cas où A et B sont nilpotentes.
b) Cas ou A et B sont diagonalisables.
c) Cas général.

GRES Paola

Ex 94: *CCM 2018*
Soit $a \neq b$ deux réels et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour P dans E on pose $\varphi(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$.
1) Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme de E.
2) Quels sont les éléments propres de φ ?
3) φ est-il diagonalisable ?

Ex 95: *CCM 2018*
Pour n dans $\mathbb{N}^*$, $a > 0$ et $b > 0$ on pose

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (a + kb) \quad B_n = \left(\prod_{k=1}^n (a+kb)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{A_n}{B_n}$.

Ex 96: *CCS 2018*
On définit pour P, Q dans $\mathbb{R}[X]$ $\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$.
1)
a) Montrer que φ est un produit scalaire.
b) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel, on a $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

2) On pose $F = \{Q \in \mathbb{R}[X] ; Q(0) = 0\}$. Montrer que l'inclusion ici est stricte.
3) Il restait des questions.

Ex 97: *CCS 2018*
1) Montrer de manière combinatoire que $\forall a \in \mathbb{N}$, $a+1 \leq 2^a$.
2) Grâce à un crible, établir la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 4001. Combien y en a-t-il ?
Vérifier que $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503$ et 4001 sont premiers.
3) Montrer que pour tout n dans $[1, 4000]$ il existe un nombre premier p tel que $n < p \leq 2n$ (note [8]).
4) Montrer que pour tout m dans $\mathbb{N}$

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1,\, p \text{ premier}} p \leq \binom{2m+1}{m} \leq 4^m.$$

5) Il y avait d'autres questions. Si c'était pour démontrer le postulat de Bertrand, il restait encore beaucoup de travail.

GUESMI Mathieu

Ex 98: *CCM 2018*
Déterminer les matrices X telles que $X^2 + X = A$, où A est une matrice 3×3 possédant trois valeurs propres distinctes (elle a été perdue en route).

Ex 99: *CCM 2018*
Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin(nt) f(t)\, dt.$$

Ex 100: *CCM 2018*
On se donne trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$, u, v et g. Etudier la continuité de

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} g(t)\, dt.$$

Ex 101: *CCS 2018*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, si u est dans $L(E)$ on pose $[u] = \{f \circ u \circ f^{-1}; f \in GL(E)\}$.

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\, 10^n & 10^n \end{pmatrix} \quad A_n = P_n \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} P_n^{-1}.$$

1) Propriétés de la relation $v\mathcal{R}u \Leftrightarrow v \in [u]$?
2)
   a) Calculer A_n pour $n \leq 20$, numériquement et formellement .
   b) Valeurs propres de A_n pour $n < 400$ et rang de $A_n - I_2$.

3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. montrer que l'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est continue ainsi que son inverse. Montrer que $u \mapsto \chi_u$ est continue.
4) Si 0 appartient à l'adhérence de $[u]$ alors u est nilpotente.
5) Condition nécessaire et suffisante pour que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ soit semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?
6) Il restait d'autres questions.

Ex 102: *CCS 2018*
1) Caractériser la continuité des applications linéaires d'un espace vectoriel normé vers un autre.
2) E est l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. On le munit de la norme $\|f\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\, dt}$.
Pour f dans E on définit g par $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$ si $x > 0$ et $g(0) = f(0)$. Montrer que $\Phi : f \mapsto g$ est un endomorphisme continu de E.
3) (Peut-être) Que dire de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\Phi(f)\|}{\|f\|}; f \in E \setminus \{0\} \right\}$?

8. Ce résultat est vrai pour out entier n non nul et est connu sous le nom de "postulat de Bertrand".

LAUDE Alexiane

Ex 103: *CCS 2018*
On appelle dérivation tout endomorphisme δ de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\forall (f, g) \in E \quad \delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g).$$

Soit δ une dérivation.
1) Calculer l'image de toute fonction constante par δ.
2) Soit f dans E, développable en série entière au voisinage de 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un élément g de E, développable en série entière au voisinage de 0, tel que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = xg(x)$.
3) Soit f un élément de E tel que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un unique élément g de E tel que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = xg(x)$.
Indication : (donnée) Utiliser $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$.
4) Soit f et g dans E tels que $f'(0) = g'(0)$ Montrer que $\delta(f)(0) = \delta(g)(0)$.
5) En déduire $\delta(f)$.

Ex 104: *CCS 2018*
On pose

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, \ P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i, \ \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \text{ et } J = C(0, 1, 0, \dots, 0).$$

1)
- a) Ecrire une fonction calculant $C(L)$, où $L = [a_0, \dots, a_{n-1}]$.
- b) Construire $C([a_0, a_1, a_2])$ pour trois vecteurs aléatoires et calculer son inverse. Faire une conjecture.
- c) On prend $n = 3$ et $a_k = k + 1$ pour $0 \le k \le 2$. Calculer $C(a_0, a_1, a_2) - P(J)$. Faire une conjecture.
- d) Avec les même valeurs numériques, comparer a_k à $\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} \omega^{-kq} P(\omega^q)$. Faire une conjecture.

2) Calculer χ_J, les valeurs propres (complexes) de J et ses vecteurs propres.
3) $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ est-elle diagonalisable ? Quel sont ses éléments propres ?(note [9])
4) Condition pour que $C = C(a_0, \dots, a_{n-1})$ soit inversible ? Si C est inversible, montrer que $C^{-1} = C(b_0, \dots, b_{n-1})$.
5) Montrer que $a_k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{q=0}^{n-1} \omega^{-kq} P(\omega^q)$.

Ex 105: *X 2018*
Soit G un groupe fini, commutatif. On pose $N = |G|$.
1) Montrer que l'ensemble des morphismes de G vers $\mathbb{C}*$ est un groupe commutatif fini.
2) Montrer que $|\hat{G}| \le N$.
Indication : Etudier $B(\phi, \psi) = \sum_{a \in G} \phi(a)\overline{\psi(a)}$ (note [10]).

Ex 106: *X 2018*
Soit s un endomorphisme symétrique à valeurs propres positives et p un projecteur orthogonal, dans un espace euclidien E. Montrer que $\mathrm{tr}\,(sp) \ge 0$.

Ex 107: *X 2018*
On considère l'ensemble des entiers $[1, n]$
1) On cherche la probabilité de choisir k entiers dans $[1, n]$, tels que deux d'entre eux ne soient jamais adjacents.
- a) A partir de quelle valeur de k cette probabilité est-elle nulle ?
- b) Déterminer cette probabilité.

2) On considère une table (ronde !) avec $2n$ places ainsi que n couples (a_i, b_i). On place a_i en $2i$, pour $1 \le i \le n$, puis les b_i au hasard sur les places restantes. Déterminer la probabilité qu'aucun des b_i ne soit à côté de a_i.

---

9. Il fallait démontrer et utiliser le fait que $C(a_0, \dots, a_{n-1}) = P(J)$

10. B est un produit scalaire complexe sur $\mathcal{A}(G, \mathbb{C})$. Cette notation est hors-programme comme l'a d'ailleurs bien précisé l'examinateur. L'idée est de prouver $B(\phi, \psi) = 0$ si $\phi \ne \psi$ et d'en déduire en utilisant la linéarité à gauche que toute famille d'éléments distincts de $\hat{G}$ est libre.

D'autre, dans ces deux premières questions la commutativité de G ne sert à rien. L'examinateur avait peut-être en réserve d'autres questions permettant d'établir que $|\hat{G}| = N$ ou même que G et $\hat{G}$ sont isomorphes lorsque G est commutatif.

Ex 108: *CCMP 2018*
Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, fermé dans $M_n(\mathbb{R})$. On considère $\mathcal{A} = \{M \in M_n(\mathbb{R}); \forall t \in \mathbb{R}\ e^{tM} \in G\}$.
1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
2) Soit A et B dans $\mathcal{A}$, montrer que $AB - BA$ est dans $\mathcal{A}$.
3) Donner quelques exemples de sous-groupes G et étudier le sous-espace $\mathcal{A}$ associé.

Ex 109: *CCMP 2018*
On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n.$$

1) Déterminer le rayon de convergence R de f et calculer $f(x)$ pour x dans $]-R, R[$.
2) Montrer que $f(\frac{1}{4})$ existe et calculer sa valeur.

MAGNE Tanguy

Ex 110: *X 2018*
On note ℓ_2 l'espace vectoriel des suites réelles de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ de carré sommable, muni de la norme $\|v\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k^2}$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des endomorphismes continus de ℓ_2 tels qu'il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ pour laquelle : $\forall v \in \ell_2\ T(v) = (t_k v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. On note $\mathcal{P}$, le sous-ensemble $\ell_2 \cap (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}$.
1) Montrer que $T \in \mathcal{D}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathcal{P}\ \lambda x \pm T(x) \in \mathcal{P}$.
2) Soit Q un cône convexe fermé de ℓ_2, c'est-à-dire une partie fermée, convexe et telle que pour tout x de Q et tout $\lambda \geq 0$ $\lambda x \in Q$. Soit

$$A_Q = \{T \in L(\ell_2); \exists \lambda \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in Q\ \lambda x \pm T(x) \in Q\}.$$

Montrer que A_Q est une algèbre.

Ex 111: *X 2018*
Soit

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Pour Q dans $\mathbb{C}[X]$ on note

$$E(Q) = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}; \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ (Q(\Delta)(u))_n = 0\}.$$

1) Montrer que $E(Q)$ est un sous-espace vectoriel, et qu'à n_0 fixé, il est de dimension finie.
2) On suppose que Q est scindé à racines simples et que celles-ci sont de module 1. Soit u dans $E(Q)$ avec $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Montrer que u_n est nul à partir d'un certain rang.
3) Soit u dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, bornée. Pour $t \in]-1, 1[$ on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$ (vérifier que f est bien définie. On suppose que f est une fraction rationnelle, c'est-à-dire :

$$\exists (P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2 \quad \forall t \in]-1, 1[\ f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}.$$

Montrer qu'il existe $\tilde{Q}$ dans $\mathbb{C}[X]$,tel que $u \in E(\tilde{Q})$.
4) Soit $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_r < 1$ et $(a_1, \ldots, a_r)$ dans $\mathbb{R}^r$. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_k \cos(2\pi\theta_k n)$

a) Montrer que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$ est une fraction rationnelle.
b) Oubliée. Peut-être déterminer P et Q.

Ex 112: *CCM 2018*
Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
1) Calculer $E(\arg(Z))$, $E(\mathcal{R}\mathrm{e}(z))$, $E(\mathcal{I}\mathrm{m}(z))$, $\mathrm{Cov}(\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{Z}), \mathcal{I}\mathrm{m}(\mathrm{Z}))$.
2) $\mathcal{R}\mathrm{e}(Z)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(Z)$ sont-elles indépendantes ?

Ex 113: *CCM 2018*
Soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \mapsto & (X^2-1)P''(X)+(2X+1)P'(X) \end{array}$$

Pour (P,Q) dans $(\mathbb{R}[X])^2$ on pose

$$<P|Q>=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)Q(t)\,dt.$$

1) Montrer qu'on définit bien ainsi un produit scalaire.
2) Montrer que φ est symétrique.
3) Montrer que φ restreint à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme diagonalisable.
4) Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\in[0,n]}$ dans $(\mathbb{R}_n[X])^{n+1}$, base de $\mathbb{R}_n[X]$, formée de vecteurs propres de φ, avec $\deg P_k=k$ et k unitaire.
5) (Oubliée) Peut-être en déduire une base orthogonale (ou même orthonormale) de $\mathbb{R}[X]$.

Ex 114: *CCS 2018*
$A=\{u+iv;(u,v)\in\mathbb{Z}^2\}$ (note [11]). Soit $\phi:z\mapsto|z|^2$.
Pour (n,k) dans $\mathbb{N}^2$ on pose $S_{n,k}=\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{a\in A,\phi(a)=n}a^k$.
1) Montrer que A est un anneau et déterminer les éléments inversibles de A.
2) Montrer que pour tout couple (a,b) dans A^2, avec $b\neq 0$, il existe (q,r) dans A^2 tel que $a=bq+r$ avec $\phi(r)<\phi(b)$ (note [12]).
3) Montrer que pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, $S_{n,k}$ est un entier.

Ex 115: *CCS 2018*
1) On considère $(a_n)\in\mathbb{R}^n$, où $a_0\neq 0$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{R}^n}$ telle que $a_0b_0=1$ et $\forall n\geq 1\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k=0$.
Ecrire un programme donnant $(b_0,\dots,b_n)$ en fonction de $(a_0,\dots,a_n)$.
2) Appliquer le programme à la suite $(\frac{1}{(n+1)!})_{n\geq 0}$, pour $k\in[0,10]$. Conjecturer un résultat.
3) On suppose maintenant que $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ est de rayon de convergence non nul.
  a) Montrer qu'il existe q dans $\mathbb{R}^{*+}$ et M dans $\mathbb{R}^{*+}$ tels que pour tout n $|a_n|\leq Mq^n$.
  b) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad |b_n|\leq\frac{M}{|a_0|^2}q^n\left(1+\frac{M}{|a_0|}\right)^{n-1}.$$

  c) En déduire que $\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ a un rayon de convergence non nul. Etablir en outre un lien entre $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$.

4) On pose $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$.
  a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
  b) Montrer que f est développable en série entière de rayon de convergence >0. On pose $B_n=f^{(n)}(0)$.
  c) Avec la conjecture de la question 2) que pouvez-vous dire des B_n. Le montrer.

5) On pose $S_k(n)=\sum_{p=0}^{n-1}p^k$.
  a) Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{S_k(n)}{k!}x^k$.
  b) En déduire une expression de $S_k(n)$ à l'aide des B_i.

Ex 116: *ENS LRS 2018*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, ne suivant pas obligatoirement la même loi. On suppose que pour tout n $E(X_n)=0$ et $E(X_n^2)<+\infty$. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.
Montrer que

$$\forall c>0\quad \mathbb{P}(\max_{i\in[1,n]}|S_i|\geq c)\leq\frac{E(S_n^2)}{c^2}.$$

---

11. A s'appelle l'anneau des entiers de Gauss.
12. Ce n'était pas demandé semble-t-il, ou peut-être dans des questions à venir ultérieurement, mais on peut déduire aisément de ce résultat que tout idéal de A est monogène. Bonne occasion de réviser la démonstration de la structure des idéaux de Z et de $\mathbb{K}[X]$.

Ex 117: *ENS LRS 2018*
Soit E un espace vectoriel. Existe-t-il deux normes N_1 et N_2 et une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $E^{\mathbb{N}}$, x et y dans E, $x \neq y$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ dans (E, N_1), $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = y$ dans (E, N_2) ?

— Montrer que la réponse est non si E est de dimension finie.
— Montrer que la réponse est oui si $E = \mathbb{R}[X]$.

Ex 118: *ENS RS 2018*
Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. On dispose d'un dé à r faces, que l'on lance successivement. Les lancers sont indépendants. On lance le dé jusqu'à ce qu'on ait obtenu toutes les faces. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués.
1) Donner la loi de T
2) Exprimer T à l'aide de variables aléatoires suivant des lois géométriques. En déduire l'espérance de T, puis un développement asymptotique quand r tend vers $+\infty$.

Ex 119: *ENS L 2018*
1) Montrer que pour tout n il existe un unique polynôme P_n dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $P_n(X + \dfrac{1}{X}) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$.
2) Décomposer en éléments simples $\frac{1}{P_n}$.

MAGNIN Clément

Ex 120: *CCS 2018*
Soit P dans $\mathbb{C}[X]$ unitaire. On note $P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}.$$

On pose $D : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
1) Montrer que D est un endomorphisme puis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = P(D)((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$
2)
  a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
  b) On note E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que si $P(D)((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Montrer que PQ est dans E si et seulement P et Q sont dans E.
  c) En déduire que pour tout P de E, les racines de P sont de module strictement inférieur à 1.

3) Perdue. Peut-être prouver la réciproque du *c)*

Ex 121: *CCMP 2018*
Soit E une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$ et A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout v de $\mathbb{R}^n$: $Av \in E$ et $v - Av \in E^{\perp}$.
Que dire de A et E.

Ex 122: *CCMP 2018*
E est un espace euclidien, p un projecteur de E. Montrer que p est orthogonal si et seulement si pour tout x de E on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Ex 123: *CCMP 2018*
1) Quel est le cardinal de $GL_2(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}})$?
2) Quel est le cardinal de $GL_3(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}})$?

Ex 124: *CCMP 2018*
Soit α dans $\mathbb{R}$. On pose

$$T_\alpha \;:\; \begin{array}{ccc} [0,1[& \to & [0,1[\\ x & \mapsto & (x+\alpha) \bmod 1 \end{array}$$

On fixe x dans $[0,1[$. Quelles sont les valeurs de α telles que $\{T_\alpha^i(x), i \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $[0,1[$?

Ex 125: *CCS 2018*
Soit A dans $S_n(\mathbb{R})$. On note $n_+(A)$ le nombre de valeurs propres strictement positives de A et $n_-(A)$ le nombre de valeurs propres strictement négatives de A.
1) A l'aide de Python écrire une fonction qui à A associe le couple $(n_+(A), n_-(A))$.
2) Si A et B sont symétriques réelles, on dit que A est congrue à B s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPBP$. Montrer que la congruence est une relation d'équivalence.
3) Soit A et B symétriques réelles. On suppose $(n_+(A), n_-(A)) = (n_+(B), n_-(B))$, montrer que A est congrue à B.
4) Soit A et B deux matrices de $S_n(\mathbb{R})$ congrues l'une à l'autre. On pose $\sigma(A) = (p, q) = (n_+(A), n_-(A))$ et $\sigma(B) = (r, s) = (n_+(B), n_-(B))$
a) Montrer qu'il existe un un sous-espace F de dimension p tel que $\forall x \in F$ $x \neq 0$ ${}^txAx > 0$
b) Montrer qu'il existe un sous-espace G de dimension $n - p$ tel que $\forall x \in G$ ${}^txAx \leq 0$
c) En déduire $\sigma(A) = \sigma(B)$.

5) Soit M dans $S_n(\mathbb{R})$ $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et on suppose $A \in GL_p(\mathbb{R})$.
a) On pose $S - D - CA^{-1}B$. Vérifier que S est symétrique.
Suite de l'énoncé : Il fallait conjecturer à l'aide de Python une relation entre $n_+(M)$, $n_+(A)$ et $n_+(S)$ et entre $n_-(M)$, $n_-(A)$ et $n_-(S)$, puis prouver $n_+(M) = n_+(A) + n_+(S)$ et $n_-(M) = n_-(A) + n_-(S)$.

MICHELESSA Mario

Ex 126: *X 2018*
Soit f une fonction continue à support compact.

$$T_1 = \{t \mapsto f(t - x); x \in \mathbb{R}\},\ T = \text{Vect}\{T_1\},$$

et

$$\mathcal{C} = \{x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)\,dt; g \text{ constante par morceaux à support compact}\}.$$

Montrer que tout étément de T peut être uniformément approché par des éléments de $\mathcal{C}$ et inversement.

Ex 127: *X 2018*
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ bornée. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n = b \Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\ln(N)}\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} = b.$$

Ex 128: *X 2018*
(Fin de planche) Soit $A = (a_{i,j})$ dans $M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i$ $a_{i,i} = 0$, $\forall (i, j)$ $i \neq j$ $a_{i,j} = \pm 1$. Montrer que A est inversible.

Ex 129: *ENS LRS 2018*
Soit Y une variable aléatoire réelle. On dit que Y est k-divisible si il existe $(X_1, \ldots, X_k)$ des variables aléatoires de même loi telles que Y suive la même loi que $X_1 + \cdots + X_k$.
1) Pour quelle valeurs de k une variable suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est-elle divisible ?
2) Soit Y une infiniment divisible à support compact (il existe a tel que $\mathbb{P}(Y \in [-a, a]) = 1$). Montrer que Y est presque sûrement constante.
Indication : Passer par la variance des X_i.
3) Exemple de variable aléatoire non constante et infiniment divisible ?

Ex 130: *CCS 2018*
Soit ω dans $]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathbb{P}(X = k) = \omega(1 - \omega)^k$. Soit s dans $[0, 1]$.
1) Montrer que s^X admet une espérance finie et déterminer $H(s) = E(s^X)$.
2) Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies par récurrence par

$$Z_0 = 0 \text{ et } Z_{n+1} = \sum_{i=0}^{Z_n} X_{n+1,i}$$

où les $(X_{n,i})_{n,i)\in\mathbb{N}^2}$ sont mutuellement indépendantes et suvent la même loi que X. Soit $G_n = s \mapsto E(s^{Z_n})$. Montrer que $G_{n+1} = H \times (G_n \circ H)$.
3) Montrer que $\mathbb{P}(Z_n = k) = \alpha_n(1 - \alpha_n)^k$ avec des α_n que l'on déterminera.

Ex 131: *CCS 2018*
On donne l'algorithme

```
def bezout(x,y):
   [u0,v0]=[1,0]
   [u1,v1]=[0,1]
   while y>0:
      [q,r]=[x//y,x%y]
      [u0,v0,u1,v1]=[u1,v1,x-q*u0,y-q*v0]
      [x,y]=[y,r]
   return x,u0,v0
```

1) Que retourne cette fonction ? Tester sur $(12, 7)$ et $(12, 8)$.
2) Coder `inverse`(x, a) renvoyant l'inverse de

$$x \bmod a$$

et 0 si x n'a pas d'inverse modulo a. Tester sur $(1407, 2018)$ et $(14072018, 123456789)$.
3) On définit pour $x = 1407$ et $z = x^{-1}$ (note [13])

$$\begin{cases} z_0 & = & z \\ z_{k+1} & = & z_k - (x\, z_k - 1) z_k \end{cases}$$

Programmer `z(k)`. Tester et faire une conjecture.
4) Soit P dans $\mathbb{Z}[X]$, x tel que $P(x) = 0 \bmod a^k$, et z tel que $zP'(x) = 1 \bmod a^k$. Montrer qu'il existe y dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(y) = 0 \bmod a^{k+1}$, $zP'(y) = 1 \bmod a^k$ et $y = x \bmod a^k$.
5) Démontrer la conjecture.
6) Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que $P \wedge P' = 1$ si et seulement si P est sabs facteur carré dans sa décomposition.
7) Il restait d'autres questions.

Ex 132: *CCM 2018*
Une variable aléatoire X, à valeurs dans N est dite décomposable si et seulement si il existe deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières Y et Z telles que X suive la même loi que $Y + Z$.
1) Lien entre G_X, G_Y et G_Z ?
2) Si X suit une loi binomiale, est-elle décomposable ?
3) Soit X une variable suivant une loi uniforme sur $[0, n-1]$, n non premier. Montrer qu'il existe $r > 1$ et $s > 1$ tels que

$$G_X(x) = \left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r-1} x^i\right)\left(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s-1} x^{rj}\right).$$

Que peut-on en déduire.
4) Soit X une variable suivant une loi uniforme sur $[0, n-1]$, n premier. Montrer que X n'est pas décomposable.
5) Que dire de la décomposabilité des loi de Poisson, des lois géométriques ?

Ex 133: *CCM 2018*
Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, à valeurs réelles, s'annulant au moins en n réels distincts $a_1 < \cdots < an$.
1) Montrer que

$$\forall x \in [a, b] \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \quad \exists c \in]a, b[\ f(x) = \frac{(x - a_1)\cdots(x - a_n)}{n!} f^n(c).$$

De dire de cette formule si x est un des a_i.
2) En déduire une majoration $|f|$ sur $[a, b]$.
(Question supplémentaire) Qu'n déduire sur l'erreur commise en remplaçant f par son polynôme d'interpolation en les a_i.

MILLOT Lucas

Ex 134: *CCM 2018*
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs.
1) Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 0} n u_{n^2}$ converge.
2) Lier la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$ à celle de $\sum_{n\geq 0} n^2 u_{n^2}$.

13. Ce ne doit pas être la bonne valeur de départ. Car pour cette valeur la suite est constante.

Ex 135: *CCS 2018*

1) Programmer une fonction renvoyant le pgcd de deux entiers relatifs.

2) On définit deux suites de polynômes $(C_n)_{n\geq 1}$ et $(C_n)_{n\geq 1}$ par

$$C_n = \prod_{0\leq k\leq n-1, k\wedge n=1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}), \quad D_n = \prod_{1\leq d\leq n, d|n} C_d.$$

Coder des fonctions `C(n)` et `D(n)` calculant ces polynômes. Faire des conjectures sur ces polynômes et donner le coefficient de X^7 de C_{105}.

3) Si p est premier calculer $C_p(X)$.

4) Montrer que $D_n(X) = X^n - 1$.

5) Lien entre $\phi(n)$ (indicatrice d'Euler) et $\deg C_n$?

6) Montrer que $n = \sum_{d|n} \phi(d)$.

7) Si U et V sont deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$, V unitaire, , montrer qu'il exsite Q et R dans $\mathbb{Z}[X]$, avec : $U = QV + R$ et $\deg R < \deg V$ $(\deg 0 = -\infty)$.

8) Oubliée, probablement : montrer, à l'aide des questions précédentes, que les coefficients de C_n sont dans $\mathbb{Z}$.

Ex 136: *CCS 2018*

Soit f :$]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telle qu'il existe $a > 0$ avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$.

1) Montrer qu'il existe n_0 telle que f est croissante sur $[n_0, +\infty[$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)e^{-nt}$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} f(x)e^{-xt}\,dx$ converge.

3) Montrer que, lorsque $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)e^{-na}$ diverge :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)e^{-nt} \sim_{t\to a^+} \int_1^{+\infty} f(x)e^{-xt}\,dx.$$

4) Il restait deux questions.

Ex 137: *CCM 2018*

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que M est diagonalisable dans $M_5(\mathbb{C})$.

2) Montrer qu'il existe X tel que $(X, MX, \ldots, M^4X)$ soit une base de $\mathbb{R}^5$.

3) Oubliée. Peut-être : donner la matrice de $Y \mapsto MY$ dans cette base, ou, plus difficile, montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec M est $\text{Vect}\{I_5, M, M^2, M^3, M^4\}$.

MILON Romain

Ex 138: *CCS 2018*

1) Rappeler le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

2) On dit qu'un nombre réel vérifie la propriété $(\mathcal{A})$ si il existe un élément P non nul de $\mathbb{Q}[X]$ tel que $Q(\alpha) = 0$ (note [14]). Montrer que si α vérifie $(\mathcal{A})$ il existe un unique polynôme unitaire π_α tel que $P(\alpha) = 0$ si et seulement si π_α divise P. On appelle π_α le polynôme minimal de α.

3) Si α vérifie $(\mathcal{A})$ déterminer la dimension de l'espace vectoriel (noté $\mathbb{Q}[\alpha]$) engendré par les $P(\alpha)$ lorsque P parcourt $\mathbb{Q}[X]$.

4) $\displaystyle x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ vérifie-t-il $(\mathcal{A})$?(note [15])

14. Un tel nombre est dit algébrique, d'ou le A de $\mathcal{A}$.
15. Question difficile !

Ex 139: *CCS 2018*
On note $P_n = P \cap [1,n]$ où P est l'ensemble des nombre premiers.
1)
a) Ecrire une fonction `premier(n)` qui renvoie la liste des éléments de P_n.
b) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[1,n]$ et Y le nombre de nombres premiers distincts divisant X. Ecrire une fonction `y(n)` qui renvoit le nombre de diviseurs premiers (distincts) de n.
c) A l'aide d'une méthode probabiliste, déterminer $E(Y)$.
d) On note, pour p dans P, Y_p la variable aléatoire qui vaut 1 si p divise X, 0 sinon.
Déterminer la formule exacte de $E(Y)$ à l'aide des Y_p et comparer sa valeur , à l'aide de `Python`, aux simulations précédentes, pour $n = 20, 100, 200$.

2) On note $S_n = \displaystyle\sum_{p \in P_n} \frac{1}{p}$.
a) Comparer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } \prod_{p \in P_n} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$.
b) Etablir $1 + E(Y) \geq S_n$.
c) En déduire $V(X) \leq 2 + 3E(Y)$.
d) Oubliée.

3)
a) Etablir que si $m+1 < p \leq 2m+1$, $p \in P$ alors p divise $\dbinom{2m+1}{m+1}$.
b) (Oubliée) (note [16]).

Ex 140: *CCM 2018*
Montrer que

$$\forall n \geq 6 \qquad 3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n < (n+3)^n$$

en montrant dans un premier temps que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6 \quad \forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n \qquad \left(1 - \frac{k}{n+3}\right)^n \leq \frac{1}{2^k}.$$

En déduire tous les entiers naturels tels que

$$3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n = (n+3)^n.$$

Ex 141: *CCM 2018*
Si u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, non réduit à $\{0\}$, alors ils admettent un vecteur propre commun dans les trois cas suivants :
— $u \circ v = 0$,
— $u \circ v = \alpha u$, $\alpha \neq 0$,
— $u \circ v = \alpha u + \beta v$.

NAJJAR Ghassan

Ex 142: *X 2018*
E est espace euclidien, $(x_0, \ldots, x_n)$ sont des vecteurs de E tels que $(x_i|x_j) < 0$ si $i \neq j$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

16. Remarquer que même si votre coreligionnaire à oublié le contenu intégral de la question, son souvenir partiel permet de remarquer que l'outil technique p divise $\dbinom{2m+1}{m+1}$ qui servait ailleurs (démonstration du postulat de Bertrand) était à la mode en 2018 au concours Centrale. Ce compte-rendu partiel apporte donc de l'information. Que ceci vous incite donc à remonter le maximum d'information sur le contenu de vos oraux.

Ex 143: *X 2018*
Soit $H(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} h_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R>1$.
1) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 |H(e^{2i\pi t}|\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}|h_n|^2$.
2) Soit $H(x)=\dfrac{1-\overline{\alpha}z}{\alpha-z}$. Condition sur α pour H soit développable en série entière de rayon de convergence >1 ?
3) Soit $Q(X)=\sum_{k=0}^{d}\lambda_k X^k$, $(HQ)(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\gamma_k z^k$. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|^2\geq\sum_{k=0}^{n}|\gamma_k|^2.$$

Ex 144: *X 2018*
(Fin de planche) u désigne un endomorphisme de $L(E)$, $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie.
1) Montrer que $e^u\in\mathbb{R}[u]$.
2) Est-ce que le polynôme minimal est une fonction continue de u ?

Ex 145: *X 2018*
Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\sqrt{n}}{n}$?

Ex 146: *X 2018*
Soit C dans $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_{C\overline{C}}$ soit simple (c'est-à-dire premier avec son polynôme dérivé, ce qui dans le cas de $\mathbb{C}$ équivaut à "à racines simples"). Montrer que $\det(I_n+C\overline{C})\geq 0$. Montrer d'abord que $\chi_{C\overline{C}}\in\mathbb{R}[X]$.

Ex 147: *ENS RS 2018*
On note $E=\mathcal{C}^0([O,1],\mathbb{R})$.
1) Montrer que $(f,g)\mapsto< f|g >=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur E.
2) Soit $p>0$ et $a\in]0,1[$ et

$$\begin{array}{rcccl}\ell & : & E & \to & \mathbb{R}\\ & & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^a t^p f(t)\,dt\end{array}$$

Montrer que ℓ est une forme linéaire continue (pour la norme associée au produit scalaire) et calculer sa norme.
3) Existe-t-il g dans E tel que

$$\forall f\in E\quad \ell(f)=< g|f >?$$

Ex 148: *ENS L 2018*
Soit E une partie d'un espace vectoriel normée possédant la propriété du recouvrement fini (De tout recouvrement de E par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini. C'est la caractérisation de Borel-Lebesgue des compacts).
Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$.

Ex 149: *ENS LPRS 2018*
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par

$$u_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{\ldots+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}}}}}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si $(a_n^{2^{-n}})$ est bornée.

Ex 150: *ENS P 2018*
Condition sur la suite $(m_n)_{n\geq 0}$ pour qu'il existe $N\in\mathbb{N}^*$, $(p_1,\ldots,p_N)$ et $(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N}p_i=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}\quad \sum_{i=1}^{N}p_i\alpha_i^n=m_n?$$

Ex 151: *ENS P 2018*
(Fin de planche)Condition nécessaire et suffisante pour que P_σ (matrice naturellement associée à une permutation) soit diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$?

Ex 152: *CCM 2018*
Soit E un espace préhilbertien réel, $(e_1, \dots, e_n)$ des vecteurs non nuls et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.
On note $\sigma_k = \sum_{i=1}^n |<e_i, e_k>|$.
1) Montrer que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sigma_k.$$

2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k < x, e_k > \leq \|x\| \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sigma_k}.$$

3) (Perdue)

Ex 153: *CCM 2018*
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit F sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}.$$

1) Montrer que F est prolongeable par continuité en $(0,0)$. On note F la fonction prolongée.
2) Montrer que F est différentiable en $(0,0)$. Quelle est sa différentielle ?
3) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

PATENOTRE Gaëtan

Ex 154: *CCM 2018*
Soit A et B dans $\mathbb{C}[X]$, non constants, tels que

$$\{z; A(z) = 0\} = \{z; B(z) = 0\} \text{ et } \{z; A(z) = 1\} = \{z; B(z) = 1\}.$$

Montrerque $A = B$.

Ex 155: *CCM 2018*
Soit X une variable aléatoire à valeurs entières telle que $\mathbb{P}(X = k) = ak^2 \dfrac{\lambda^k}{k!}$.
1) En supposant qu'elle est définie, calculer la fonction génératrice de X.
2) En déduire la valeur de a.
3) Calculer l'espérance et la variance de X.

Ex 156: *CCM 2018*
(Fin d'oral) Des questions subsidiaires d'arithmétique : petit théorème de Fermat, indicatrice d'Euler, convergence de la série des inverses des nombres premiers.

Ex 157: *CCS 2018*
On s'intéresse aux chemins dans $\mathbb{Z}$ de taille $2k+1$ (la taille est le nombre de sommets, la longueur des chemins est donc $2k$ (ndr)).
Un chemin est dit positif si :

i) Il commence et finit en 0.
ii) Il reste au dessus de 0 (il ne passe que par des sommets positifs ou nuls).

On modélise un chemin d'origine 0 par une suite de 1 ou -1 (correspondant au passage du sommet i au sommet $i+1$ ou $i-1$, les seuls possibles (ndr)).
On note C_n le nombre de chemins de longueur $2n$ (et donc de taille $2n+1$ (ndr))(note [17].).
1)

a) Ecrire une fonction `liste(L)` prenant en paramètre une liste L d'entiers dans $\{-1,1\}$ et renvoyant `True` si elle est associée à un chemin positif, `False` sinon.
b) Ecrire une fonction `tracé(L)` représentant graphiquement le chemin associé à la liste L.

2)

a) Calculer C_1 et C_2.
b) Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 0} C_n x^n$ vaut au moins $\frac{1}{4}$. On note f la somme de cette série entière.
c) On note $X(c)$ le plus petit entier n non nul tel que le chemin c repasse en 0, à l'instant n. Montrer que $X(c)$ est bien défini et pair.
d) Montrer que le nombre de chemin c de longueur $2n$ tel que $X(c)=2k$ vaut $C_{k-1}C_{n-k}$.
e) Montrer que pour tout n $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{k-1}C_{n-k}$, et le vérifier à l'aide de `Python`
f) Trouver une équation du seond degré vérifiée par f.
g) Montrer que $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ et le vérifier à l'aide de `Python`.

Ex 158: *CCS 2018*
Soit A dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$.
1) Montrer que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, {}^tAA$ et en déduire $r = \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,({}^tAA)$.
2) Montrer qu'il existe $(Y_1,\dots,Y_r)\in(\mathbb{R}^p)^r$ tel que si $Y=(Y_1|\cdots|Y_r)\in M_{p,r}(\mathbb{R})$ alors ${}^tY\,{}^tAAY=\Delta$, où Δ est une matrice diagonale.
Trouver de plus des $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ pour que $(\alpha_1AY_1,\dots,\alpha_rAY_r)$ soit orthonormale.
3) On note $X_i=\alpha_iAY_i$, $1\leq i\leq r$ et $Y=(X_1|\cdots|X_r)\in M_{n,r}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Λ telle que $A=X\Lambda{}^tY$.

Ex 159: *ENS LRS 2018*
Soit H un espace préhilbertien. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note F la propriété suivante (Note [18]). :

$$\exists u\in H\ \forall v\in H\ \lim_{n\to+\infty} <u_n|v> = <u|v>\ .$$

1) Quel est le lien entre les deux propositions suivantes :
— $\lim_{n\to+\infty}\|u_n-u\|=0$ et
— $\forall v\in H\ \lim_{n\to+\infty} <u_n|v> = <u|v>$.

2) On prend $H=\ell_2(\mathbb{R})=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2<+\infty\}$. Montrer que de toute suite bornée d'éléments de H on peut extraire une suite vérifiant (F).

Ex 160: *ENS RS 2018*
1) Soit $K\subset\mathbb{R}^n$ un compact non vide. Soit $f:K\to K$ continue. On dit que f est minimale sur K si les seuls fermés de K stables par f sont K et $\emptyset$. Montrer que si f est minimale alors f est surjective.
2) On suppose dans cette question K fini et f minimale. Décrire f.
3) On revient au cas général. Montrer que f est minimale si et seulement si pour tout x de K $\{f^n(x);n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans K.
4) On choisit $K=\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$. Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{U} & \to & \mathbb{U} \\ & & x & \mapsto & xe^{2i\pi\alpha} \end{array}$$

Montrer que f est minimale.

17. C_n comme nombre de Catalan
18. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u. D'où le F de (F).

Ex 161: *ENS L 2018*
f est une application de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{C}$ telle que $f(1) \neq 0$. On admet l'existence de $f^* : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \ \sum_{d|m} f(d) f^*(\frac{m}{d}) = \delta_{m,1}.$$

On définit la matrice $R_n(f) = (r_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{C})$ par

$$\begin{array}{rcl} r_{i,j} & = & f(\frac{i}{j}) \text{ si } j|i, \\ & = & 1 \text{ si } i = 1 \text{ et } j > 1, \\ & = & 0 \text{ sinon.} \end{array}$$

Objectif : calculer le déterminant de $R_n(f)$.
Indication : Introduire

$$S_n(f) = R_n(f) - \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

puis calculer $S_n(f)S_n(f^*)$ et $R_n(f)S_n(f^*)$.
Le déterminant était donné :

$$\det R_n(f) = (f(1))^n (1 + \sum_{k=2}^{n} f^*(k)).$$

Ex 162: *X 2018*
X, Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$ et $\mathcal{Y} \subset \mathbb{N}$ où

$$\mathcal{X} = \{x_i, i \in I; \mathbb{P}(X = x_i) > 0\} \text{ et } \mathcal{Y} = \{y_j, j \in J; \mathbb{P}(Y = y_j) > 0\}.$$

1) Montrer que pour toute fonction g il existe une fonction h telle que $E(Xg(y)) = E(h(Y)g(Y))$.
2) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$. On pose $h(Y) = E(X|Y)$ (c'est une simple notation, on remarquera qu'il s'agit d'une variable aléatoire (note [19])). On pose $T = X + Y$, calculer $E(f(X)|T$ où f est une fonction quelconque.

Ex 163: *X 2018*
(Fin d'oral) Soit S dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et P la matrice d'un projecteur orthogonal. Montrer que $\operatorname{tr}(SP) \geq 0$.

Ex 164: *X 2018*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $M_n(\mathbb{R})$, telle que $\forall (i,j) \ a_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.
1) Montrer que $1 \in \operatorname{Sp}(A)$.
2) Soit $a = \max a_{i,i}$, montrer que

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \overline{D}(a, 1-a) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leq 1 - a\}.$$

(note [20]).
3) On suppose que $\lambda = 1$ est valeur propre simple de A. Montrer que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de rang 1, puis que les lignes de cette matrice sont identiques.
4) On prend, avec $p + q = r = 1$, $p, q, r > 0$,

$$A = \begin{pmatrix} r & p+q & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p & r & q & \ddots & & \vdots \\ 0 & p & r & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & p & r & q \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p+q & r \end{pmatrix}$$

Objectif : calculer $\lim_{k \to +\infty} A^k$.

19. La notion introduite est celle d'espérance conditionnelle, qui est d'une importance cruciale en probabilités.
20. Ce résultat est faux. On a

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}(a_{i,i}, 1 - a_{i,i}) \subset \overline{D}(a, 1-b)$$

avec $b = \min a_{i,i}$.

PEROT Alexandre

Ex 165: *X 2018*
On note $\mathcal{C} = \{u \in \mathbb{R}^N; \exists \ell \in \mathbb{R} \ \lim u_n = \ell\}$ et $\mathcal{C}_0 = \{u \in \mathbb{R}^N; \lim u_n = 0\}$.
1) Montrer qu'il existe un isomorphime d'espaces vectoriels entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$.
2) Existe-t-il une isométrie d'espaces vectoriels normés entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$?

Ex 166: *X 2018*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ de même loi. Montrer qu'il existe une suite extraite bornée presque sûrement. (note [21])

Ex 167: *X 2018*
$E = \mathbb{R}^{n+1}$, $S : X \in E \mapsto \#\{i \in [0, n-1]; x_i x_{i+1} < 0\}$ (nombre de changement de signe).
1) Montrer que pour A dans $M_{n+1}(\mathbb{R})$ avec

$$\forall (I, J) \in (\mathcal{P}([0, n]))^2 \ |I| = |J| \text{ et } A' = (a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \quad \det A' > 0$$

on a $S(AX) \leq S(X)$.
2) P dans $\mathbb{R}[X]$, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et $A = (a_0, \ldots, a_n)$. Montrer que $\#(Z(P) \cap \mathbb{R}^+) \leq S(A)$.

Ex 168: *ENS LPRS 2018*
Soit E l'ensemble des entiers m tels qu'il existe m entiers consécutifs divisibles par un cube (> 1 !). Montrer que E n'est pas borné supérieurement.

Ex 169: *ENS LPRS 2018*
Soit Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ à support compact. On définit

$$V(f) = \sup\{\int_{\mathbb{R}} f\varphi',\ \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ \|\varphi\|_{+\infty}\}.$$

Calculer $V(f)$.

Ex 170: *ENS LPRS 2018*
Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$, continue, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ f(nx) = f(x).$$

Que dire de f ?

Ex 171: *CCM 2018*
1) Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
2) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-A, A]$ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout n. Montrer que f est développable en série entière de rayon de convergence $R \geq A$.
3) Montrer que tan est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4) Montrer que $x \mapsto e^{e^x}$ est développable en série entière, et préciser le rayon de convergence.

Ex 172: *CCM 2018*
Soit A dans $M_n(\mathbb{Z}) \cap GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \overline{B(0,1)}$.
1) Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\ \exists k \in \mathbb{N}^* \quad \lambda^k = 1.$$

2) (bonus) Caractériser les matrices de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Ex 173: *CCS 2018*
Soit G un groupe et $\hat{G}$ l'ensemble des morphismes de G vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.
1) Rappeler les notions de groupe et de morphisme de groupes. Définir sur $\hat{G}$ une loi qui en fasse un groupe.
2) Caractériser $\hat{G}$ si $G = (\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +)$.
3) Si G est fini, montrer que $\hat{G}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^G$ (on raisonnera par récurrene).

21. Montrer que ce résultat est faux dans le cas de variables indépendantes, si X_1 n'est pas presque sûrement bornée. Le bon énoncé doit être : "Montrer que presque sûrement on peut extraire de $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée".

Ex 174: *CCS 2018*
Soit $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $X : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ de classe $\mathcal{C}^1$, solution de

$$(\mathcal{L}) \qquad X' = AX - XA.$$

1) On suppose $A : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ et $X(0) = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Justifier le schéma d'Euler

$$\begin{cases} X_{k+1} & = & X_k + h(A(t_k)X_k - X_k A(t_k)) \\ t_{k+1} & = & t_k + h \end{cases}$$

en définissant h, X_k et t_k.

b) Calculer la liste des X_k pour $t \in [0, 2]$ et $h = \frac{1}{1000}$.

c) Tracer les graphes de $t \mapsto \operatorname{tr}(X(t))$, $t \mapsto \operatorname{tr}(X(t)^2)$ et $t \mapsto \operatorname{tr}(X(t)^3)$

d) Tracer sur un même graphe $t \mapsto \lambda_1(t)$ et $t \mapsto \lambda_2(t)$ où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de X. Commentez.

2) On suppose $n = 2$. Soit X une solution de $(\mathcal{L})$.

a) Montrer que

$$(X^k)' = \sum_{i=0}^{k-1} X^i X' X^{k-1-i}.$$

b) Montrer que $\operatorname{tr}(X^k)$ est constante.

c) Montrer que le spectre de X dans $\mathbb{C}$ est constant.

d) Montrer que pour tout t $X(t)$ est semblable à $X(0)$.

e) Peut-on étendre les démonstrations à $n > 2$.

3) Montrer que si $P : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $X(0)$ de $M_n(\mathbb{C})$ l'application $Y : t \mapsto P(t)X(0)P^{-1}(t)$ est solution de $(\mathcal{L})$ pour un A à déterminer.
4) Réciproquement si X est solution de $(\mathcal{L})$ pour un A donné, alors $X(t)$ est semblable à $X(0)$, pour tout t.

Ex 175: *CCS 2018*
(Fin de planche) Déterminer

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2 x}.$$

RAKOTOVAO Setra

Ex 176: *CCS 2018*
1) Définition et caractérisation d'un hyperplan dans un espace vectoriel.
Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et si f est une forme linéaire non nulle, quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f$?
2) On souhaite démontrer l'équivalence des propositions suivantes où $(\phi_1, \dots, \phi_p)$ est une famille **libre** de formes linaires sur E (de dimension finie de dimension n), et ψ une forme linéaire sur E.

i) $\psi \in \operatorname{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_p\}$,

ii) $\bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker} \phi_k \subset \operatorname{Ker} \psi$,

iii) il existe une contante C telle que : $\forall x \in E$ $|\psi(x)| \leq C \max_{1 \leq k \leq n} |\phi_k(x)|$.

a) Justifier les implications évidentes.

b) Pour montrer que *ii)* $\Rightarrow$ *i)* on considère l'application

$$\theta \; : \; \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^p \\ x & \mapsto & (\phi_1(x), \dots, \phi_p(x)) \end{array}$$

Montrer que cette implication est surjective. Conclure.

3) Montrer *iii)* $\Rightarrow$ *i)* sans passer par les équivalences précédentes en considérant les cas $p = n$ puis $p < n$.

Ex 177: *CCS 2018*
Pour a et b réels tels que $a < b$ et h une fonction continue sur $[a, b]$, on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_n(a, b, f) = \int_a^b f(t)|\sin nt|\, dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\, dt.$$

1) Ecrire en `Python` une fonction $u(n, a, b, f)$ qui renvoie $u_n(a, b, f)$.
Renvoyer les dix premiers termes de la suite pour
— $a = 0$, $b = 0$, $f(x) = e^x$,
— $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \ln(1 + x)$.
Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?
2) Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0([a, b])$, g positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = f(c)\int_a^b g(t)\, dt.$$

(note [22])
3) Rappeler le théorème sur les sommes de Riemann.
4)
a) On considère la subdivision régulière $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ de $[a, b]$, avec $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et $c(c_k)_{0\leq k\leq n-1}$ avec $\forall k \in [0, n-1]$, $c_k \in [a_k, a_{k+1}]$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\, dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(c_k))\, dt.$$

b) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

5) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t)|\sin(nt)|\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\, dt.$$

(note [23])

Ex 178: *CCM 2018*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme diagonalisable de E.
Pour tout x de E, on note F_x le plus petit sous-espace vectoriel stable par u et contenant x.
Déterminer une C.N.S. pour qu'il existe x tel que $F_x = E$.
Lorsque cette condition est vérifiée déterminer $\{x \in E ; F_x = E\}$
(Ajouté ensuite par l'examinateur) Si on munit E d'une norme, que dire de l'ensemble précédent ?

Ex 179: *CCM 2018*
1) Déterminer la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$ et $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin u|}{u}\, du$.
2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $\int_0^{2\pi} g(t)\, dt = 0$. Montrer que $x \mapsto \int_0^x g(t)\, dt$ est périodique.
3) Soit δ dans $]0, 1]$. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^x \frac{|\sin u|}{u^\delta}\, du$, après avoir démontré que ce terme est bien défini.

ROUVEYROL Marc

Ex 180: *CCM 2018*
Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ et $m \geq 1$ tels que $P(X)^n$ divise $P(P(X))$. Montrer que X^n divise $P(X)$.

22. Ce résultat est connu sous le nom de « premier théorème de la moyenne ».
23. Ce résultat est un cas particulier du théorème de Riemann-Lebesgue qui dit que si s est continue sur $[a, b]$, g continue et T périodique sur $\mathbb{R}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)g(t)\, dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\, dt\right)\left(\int_a^b f(t)\, dt\right).$$

La démonstration précédente s'adapte sans difficulté au cas général. Il faut simplement remplacer l'utilisation du théorème de la moyenne par une majoration de la valeur absolue d'une différence (comme dans la question 4).

Ex 181: *CCM 2018*
On note $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $d_n = s_n - \ln(n)$.
1) Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite, notée γ.
2) Montrer que pour tout couple (p, q) d'entiers non nuls

$$\gamma \leq s_p + s_q - s_{pq} \leq 1.$$

Ex 182: *ENS RS 2018*
Soit $a, b > 0$, on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -au'' + bu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où u est de classe $\mathcal{C}^2$ et f continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles.
1) On admet l'existence d'une solution. Montrer qu'elle est unique.
2) Soit $g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$, atteignant un maximum en $x_0 \in]0, 1[$. Que dire de $g'(x_0)$? de $g''(x_0)$? Démontrer le résultat pour $g''(x_0)$.
3) Si u est solution du problème montrer que $\max\limits_{[0,1]} |u| \leq \dfrac{1}{b} \max\limits_{[0,1]} |f|$.
4) On introduit $w = u + \epsilon v_\epsilon$ solution du problème

$$\begin{cases} -(a + \epsilon\alpha)u'' + (b + \epsilon\beta)u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

avec ϵ assez petit pour que $a + \epsilon\alpha > 0$ et $b + \epsilon\beta > 0$. Déterminer $\lim_{\epsilon\to 0} v_\epsilon$.

Ex 183: *ENS LPRS 2018*
$n \geq 2$ $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ $S = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$. Déterminer $\max S$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$.

Ex 184: *ENS L 2018*
On note E le plan euclidien et A, B, C trois points non alignés de E. On appelle coordonnées barycentrique d'un point P de E trois réels x, y et z tels que

$$x + y + z \neq 0 \text{ et } x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

1) Donner une condition sur les coordonnées barycentriques de trois points pour qu'ils soient alignés.
2) Montrer que l'isobarycentre, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC sont alignés.

STUTZ Antoine

Ex 185: *CCS 2018*
On appelle dérivation tout endomorphisme δ de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\forall (f, g) \in E \quad \delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g).$$

Soit δ une dérivation.
1) Calculer l'image de toute fonction constante par δ.
2) Soit f dans E, développable en série entière au voisinage de 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un élément g de E, développable en série entière au voisinage de 0, tel que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = xg(x)$.
3) Soit f un élément de E tel que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un unique élément g de E tel que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = xg(x)$.
Indication : (donnée) Utiliser $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$.
4) Soit f et g dans E tels que $f'(0) = g'(0)$ Montrer que $\delta(f)(0) = \delta(g)(0)$.
5) Perdue. Probablement caractériser toutes les dérivations de E.

Ex 186: *CCMP 2018*
1) Soit B dans $M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et P dans $\mathbb{C}[X]$, non constant. Montrer qu'il existe X dans $M_n(\mathbb{C})$ tel que $P(X) = B$.
2) Le résultat reste-t-il vrai si B n'est pas diagonalisable.

Ex 187: *CCMP 2018*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$$

où λ est un réel et $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge absolument.
1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\lambda}{n} + \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})\right)$ converge.
2) En déduire que la suite $(n^\lambda u_n)_{n\geq 1})$ est convergente.
3) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Ex 188: *CCMP 2018*

$$f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\cos^2\theta)\, d\theta.$$

1) Domaine de définition de f ?
2) Domaine de continuité de f ?
3) Sur quel domaine f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Ex 189: *CCS 2018*
Soit A dans $S_n(\mathbb{R})$. On note $n_+(A)$ le nombre de valeurs propres strictement positives de A et $n_-(A)$ le nombre de valeurs propres strictement négatives de A.
1) A l'aide de Python écrire une fonction qui à A associe le couple $(n_+(A), n_-(A))$. Toute valeur propre de module inférieur à 10^{-10} sera considérée comme nulle.
2) Si A et B sont symétriques réelles, on dit que A est congrue à B s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPBP$. Montrer que la congruence est une relation d'équivalence.
3) Soit A et B symétriques réelles. On suppose $(n_+(A), n_-(A)) = (n_+(B), n_-(B))$, montrer que A est congru à B.
4) Soit A et B deux matrices de $S_n(\mathbb{R})$ congrues l'une à l'autre. On pose $\sigma(A) = (p, q) = (n_+(A), n_-(A))$ et $\sigma(B) = (r, s) = (n_+(B), n_-(B))$
   a) Montrer qu'il existe un un sous-espace F de dimension p tel que $\forall x \in F\ x \neq 0\ {}^txAx > 0$
   b) Montrer qu'il existe un sous-espace G de dimension $n-p$ tel que $\forall x \in G\ {}^txAx \leq 0$
   c) En déduire $\sigma(A) = \sigma(B)$.

5) Soit M dans $S_n(\mathbb{R})$ $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et on suppose $A \in GL_p(\mathbb{R})$.
   a) On pose $S = D - CA^{-1}B$. Vérifier que S est symétrique.
   b) Suite de l'énoncé : Il fallait conjecturer à l'aide de Python une relation entre $n_+(M)$, $n_+(A)$ et $n_+(S)$ et entre $n_-(M)$, $n_-(A)$ et $n_-(S)$, puis prouver $n_+(M) = n_+(A) + n_+(S)$ et $n_-(M) = n_-(A) + n_-(S)$.

TERLE Jocelyn

Ex 190: *X 2018*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{*+}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = a > 0$.
1) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(mx)}{f(x)}$.
2) Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}^{*+}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)\, dx$ est convergente.

Ex 191: *X 2018*
Soit $A_n = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B_n = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux familles de variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{P}(a_{i,j} = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(a_{i,j} = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(b_{i,j} = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(b_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}$. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n$ est inversible) et $q_n = \mathbb{P}(B_n$ est inversible).
1) Montrer que $p_n = q_{n+1}$.
2) Etablir $\forall n \in \mathbb{N}\ p_n \geq \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

Ex 192: *CCS 2018*
Soit $E = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}; \forall n\ f'_{n+1} = f_n\}$.

1) Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $p_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Tracer les graphes des p_n, pour $x \in [-10,10]$ et $n \in [0,100]$. Montrer que $(p_n)_{n\geq 0} \in E$.

2) On pose $c_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, $q_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_{n-k}\frac{x^k}{k!}$. Tracer les graphes des $p_n - q_n$, pour $x \in [-10,10]$ et $n \in [0,100]$. Faire une conjecture.

3) Démontrer la conjecture.

4) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. On pose $F_0 = f_0$ et $F_{n+1}(x) = \int_0^x F_n(t)\,dt$. Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

5) On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ converge uniformément sur tout segment. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n$.

6) $a_n = f_n(0)$. Exprimer f_n en fonction de F_n et des a_k.

7) Condition sur $(a_n)_{n\geq 0}$ pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment.

8) Il restait $+\infty$ questions.