Fonctions à décroissance rapide et transformation de Fourier.

Première partie : propriétés de $\mathcal{S}$

I. 1) Soit f dans $\mathcal{S}$. Soit (k,p) dans $\mathbb{N}^2$, notons pour la suite du problème $M_{k,p}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^k |f^{(p)}(x)|$, qui existe par définition de $\mathcal{S}$.

Soit f dans $\mathcal{S}$, (k,p) dans $\mathbb{N}^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x|^k |f^{(p)}(x)| \leq (1+|x|)^k |f^{(p)}(x)| = \frac{(1+|x|)^{k+1}}{1+|x|} |f^{(p)}(x)| \leq \frac{M_{k+1,p}(f)}{1+|x|}$$

Il en résulte immédiatement $\lim_{x\to\pm\infty} x^k f^{(p)}(x) = 0$.

(Voir page suivante pour la réciproque).

I. 2) Il est clair que la fonction nulle est dans $\mathcal{S}$

De plus si f et g sont dans $\mathcal{S}$ et λ dans $\mathbb{C}$, $f+\lambda g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |(1+|x|^k)(f+\lambda g)^{(p)}(x)| \leq |(1+|x|^k) f^{(p)}(x)| + |\lambda| \, |(1+|x|)^k g^{(p)}(x)|$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |(1+|x|)^k (f+\lambda g)^{(p)}(x)| \leq M_{k,p}(f) + |\lambda| M_{k,p}(g)$$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $(f+\lambda g)^{(p)} (1+|\cdot|)^k$ est bornée.

et $(f+\lambda g)$ est bien dans $\mathcal{S}$.

I. 3) - $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $t \mapsto -\frac{t^2}{2}$ aussi, donc par composition f_0 est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- On montre par récurrence que pour tout entier p il existe un polynôme Q_p tel que $f_0^{(p)}(x) = Q_p(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour tout x ($Q_{p+1} = Q_p' - X Q_p$).

Or $e^{-\frac{x^2}{2}} \underset{+\infty}{=} o(e^{-|x|})$ et $\lim_{x\to\pm\infty} |x|^\alpha e^{-|x|} = 0$ pour tout α réel.

donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\lim_{x\to\pm\infty} (1+|x|)^k f_0^{(p)}(x) = \lim_{x\to+\infty \atop -\infty} ((1+|x|)^k Q_p(x)) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$.

f_0 est bien dans $\mathcal{S}$.

I.3) Réciproque de la question I.1)

Soit f dans $\mathcal{E}$ telle que $\forall k\in\mathbb{N}$ $\forall p\in\mathbb{N}$ $\lim_{x\to\pm\infty} x^k f^{(p)}(x)=0$

Alors, puisque $x\mapsto x^k f^{(p)}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est bornée (le cas échéant, si vous avez le temps placer la démonstration)

Donc $x\mapsto(1+|x|)^k f^{(p)}(x)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}|x|^i f^{(p)}(x)$ est bornée, comme somme de fonctions bornées.

I.4) $\mathcal{E}$ est stable par multiplication. Si f et g sont dans $\mathcal{S}$ alors fg est dans $\mathcal{E}$ et pour tout p entier, et tout x réel

$$(fg)^{(p)}(x)=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}x^i f^{(i)}(x)\,g^{(p-i)}(x)$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}$

$$x^k(fg)^{(p)}(x)=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\left(x^{i+k}f^{(i)}(x)\right)g^{(p-i)}(x)$$

Or pour tout i dans $[0,k]$ $\lim_{x\to\pm\infty} x^{i+k}f^{(i)}(x)=0$ $\lim_{x\to\pm\infty} g^{(p-i)}(x)$

Donc $\forall k\in\mathbb{N}$ $\forall p\in\mathbb{N}$ $\lim_{x\to\pm\infty} x^k(fg)^{(p)}(x)=0$

et fg est bien dans $\mathcal{S}$.

I.5) On commence par remarquer que si f est dans $\mathcal{S}$, $f^{(s)}$ l'est aussi (remplacer p par $p+s$).

Si f est dans $\mathcal{S}$ et P est polynomiale de degré d, alors dans la démonstration précédente, en remplaçant g par P

$$x^k(f^{(s)}P)^{(p)}(x)=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\underbrace{P^{(p-i)}(x)\,x^{i+k}}_{=O(x^{i+k+d})}f^{(i+s)}(x)$$

Donc $\lim_{x\to\pm\infty} x^k(f^{(s)}P)^{(p)}(x)=0$.

Ceci prouve (k et p étant quelconques) que $Pf^{(s)}$ est dans $\mathcal{S}$.

I.6) Il est clair que $\tau_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la dérivation des fonctions composée donne. (3)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad (\tau_a(f))^{(p)}(x) = f^{(p)}(x-a)$$

puis $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} \qquad x^k (\tau_a(f))^{(p)}(x) = x^k f^{(p)}(x-a)$

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ |x|>|a| \qquad \underline{x^k (\tau_a(f))^{(p)}(x) = \frac{x^k}{(x-a)^k}(x-a)^k f^{(p)}(x-a)}$$

Or $\underline{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^k}{(x-a)^k} = 1}$ $\quad \underline{\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x-a)^k f^{(p)}(x-a) = 0}$

Il en résulte $\forall (p,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^k (\tau_a(f))^{(p)}(x) = 0$

$\tau_a(f)$ est donc bien dans $\mathcal{S}$.

I.7) ~~Toute~~ série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (prendre $k=p=0$) donc $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est bien définie.

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{n\geq 0} f_n^{(p)} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \quad (k=0)$$

donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par conséquent $\underline{S \text{ est dans } \mathcal{E} \text{ et pour tout } p \quad S^{(p)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}}$.

pour tout k $\quad \sum\limits_{n\geq 0} (t \mapsto (1+|t|)^k f_n^{(p)}(t))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Cela impose en particulier que sa somme $t \mapsto (1+|t|)^k S^{(p)}(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

$\underline{S \text{ est donc dans } \mathcal{S}.}$

Si on avait supposé « $\sum\limits_{n\geq 0} x \mapsto x^k f_n^{(p)}(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ pour tout k, p », on aurait alors utilisé le <u>théorème de permutation $\lim / \sum$</u> pour en déduire

$$\forall p, k \quad \lim_{x\to\pm\infty} x^k S^{(p)}(x) = 0$$

et retrouver $\quad S \in \mathcal{S}$.

Deuxième partie : transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$.

II.1) Si f est dans $\mathcal{S}$ f est continue et, puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 f(x) = 0$, on a $f(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc f est intégrable.

II.2.a) Soit f dans $\mathcal{S}$.

$$\begin{cases} \cdot \ \forall x \in \mathbb{R} \quad t \mapsto e^{-ixt} f(t) \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R} \\ \cdot \ \forall t \in \mathbb{R} \quad x \mapsto e^{-ixt} f(t) \text{ est continue.} \\ \cdot \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad |e^{-ixt} f(t)| \leq |f(t)| = \varphi(t) \quad \varphi \text{ intégrable.} \end{cases}$$

Donc $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ $|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}$, donc $\hat{f}$ est bornée.

II.2.b) La linéarité de l'intégrale (et de la multiplication par e_{-x}) permet d'affirmer que $\mathcal{F}$ est linéaire.

D'après la question précédente $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}$, donc $\mathcal{F}$ est continue.

$\sup\limits_{f \neq 0} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_\infty}{\|f\|_1} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, et si on prend f dans $\mathcal{S}$ positive non nulle, par exemple f_0, $\mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}$

donc $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \geq |\mathcal{F}(f)(0)| \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$

Par conséquent $\sup\limits_{f \neq 0} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_\infty}{\|f\|_1} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

En conclusion $|||\mathcal{F}||| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

II.2c) Soit f dans $\mathcal{S}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-ixt} f(t)}_{g(x,t)} \, dt$

$\forall p \in \mathbb{N}$

- $\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t) = (-it)^p e^{-ixt} f(t)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$
- $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(\cdot, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, \cdot)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \left| \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t) \right| \leq |t|^p |f(t)| = \varphi_p(t)$

et φ_p est intégrable car continue avec $\varphi_p(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, car $f(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{|t|^{p+2}}\right)$.

Donc $\underline{\mathcal{F}(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\mathcal{F}(f))^{(p)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^p e^{-ixt} f(t) \, dt$$

ce qui se résume en $\underline{(\mathcal{F}(f))^{(p)} = (-i)^p \mathcal{F}(T^p f)}$, en particulier $\underline{(\mathcal{F}(f))' = -i \, \mathcal{F}(Tf)}$.

II.3. D'après la question précédente. $\hat{f_0}' = -i \, \mathcal{F}(T f_0)$

Or $-i\mathcal{F}(T f_0)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[i e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - i \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$\underline{\hat{f_0}'(x) = 0 - x \hat{f_0}(x)}$.

Donc $\exists c \ \forall x \quad \hat{f_0}(x) = c \, e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\qquad c = \hat{f_0}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$

Par conséquent $\underline{\hat{f_0} = f_0}$.

II.4.a) $\mathcal{F}(\tau_a(f))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t-a) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u+a)x} f(u) \, du = e^{-iax} \mathcal{F}(f)(x)$

$$\underline{\mathcal{F}(\tau_a(f)) = e_{-a} \, \mathcal{F}(f)}$$

II.4b) $\mathcal{F}(f')(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f'(t)\,dt = \left[e^{-ixt} f(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + ix \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\,dt$ 6

(en intégrant par parties). Puisque f tend vers 0 en $\pm\infty$

$$\mathcal{F}(f')(x) = ix\,\mathcal{F}(f), \quad \text{soit} \quad \mathcal{F}(f') = iT\,\mathcal{F}(f).$$

Par récurrence on obtient $\underline{\mathcal{F}(f^{(k)}) = (i)^k T^k \mathcal{F}(f)}$

II.4c. Pour tout couple (k,p) dans $\mathbb{N}^2$ et tout x dans $\mathbb{R}$

on a $x^{k+1}\mathcal{F}(f^{(p)})(x) = \frac{1}{i^{k+1}}\mathcal{F}(f^{(p+k+1)})(x)$

Donc $|x^k \mathcal{F}(f^{(p)})(x)| \leq \frac{1}{|x|} |\mathcal{F}(f^{(p+k+1)})(x)|$ pour $x \neq 0$

$$\underline{|x^k \mathcal{F}(f^{(p)})(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|x|} \| f^{(p+k+1)} \|_1}$$

et par conséquent $\underline{\lim_{x \mapsto \pm\infty} |x^k \mathcal{F}(f^{(p)})(x)| = 0}$

II.4.d On en déduit en particulier $\lim_{x\to\pm\infty} x^k \mathcal{F}(f)(x) = 0$ pour tout k et tout f de $\mathcal{S}$. Or pour tout f de $\mathcal{S}$ et tout p, $T^p f$ $(= t \mapsto t^p f(t))$ est dans $\mathcal{S}$ d'après I.5.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}$ $\lim_{x\to\pm\infty} x^k \mathcal{F}(T^p f)(x) = 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^k (-i)^p \mathcal{F}(T^p f)(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^k \left(\mathcal{F}(f)\right)^{(p)}(x) = 0$$

Par conséquent $\underline{\mathcal{F}(f) \text{ est dans } \mathcal{S} \text{ d'après I.1}}$

(rappel $\mathcal{F}(f)$ est dans $\mathcal{E}$ d'après II.2.c)

Troisième partie : transformée de Fourier réciproque.

III.1 $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f_0))(x) = \overline{\mathcal{F}}(f_0)(x) = \mathcal{F}(f_0)(-x) = f_0(-x) = f_0(x)$

Donc $\underline{\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f_0)) = f_0}$

III.2. $g(x) = \int_0^1 \underbrace{f'(xt)}_{h(x,t)} dt$

$\forall p \in \mathbb{N}$

* $\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) = t^p f^{(p+1)}(xt)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$
* $\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$
* $\forall t \in [0,1]$ $\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(\cdot,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
* $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$ $\left|\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\right| \leq 1 \, \|f^{(p+1)}\|_\infty = \varphi_p(t)$

  où φ_p est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$

Donc g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $\underline{\forall x \; g^{(p)}(x) = \int_0^1 t^p f^{(p+1)}(xt)\,dt}$

g est bien dans $\mathcal{E}$.

III.3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(u)\,du$

$f(x) = \int_0^x f'(u)\,du$. Le changement de variable $u = xt$

donne $f(x) = \int_0^1 x f'(xt)\,dt = x g(x)$. Vrai aussi pour $x=0$.

Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x g(x)}$

$\underline{\forall x \neq 0 \;\; \forall k, p \in \mathbb{N}^2 \qquad x^k g^{(p)}(x) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} f^{(p-i)}(x) \times \frac{x^k \times (-1)^i \, i!}{x^{i+1}}}$

Donc $\forall k, p \in \mathbb{N}^2$ $\lim_{x \to \pm\infty} x^k g^{(p)}(x) = 0$ et g est dans $\mathcal{S}$

($\lim_{x\to\pm\infty} x^{k-(i+1)} f^{(p-i)}(x) = 0$ si $k-(i+1) \geq 0$, et à plus forte raison si $k-(i+1) < 0$)

III 4) Si $f(0)=0$ alors $f = Tg$, $g \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(Tg) = \left(-\frac{1}{i}\right)(\mathcal{F}(g))' \qquad (\text{II}.2.c)$$

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = -\frac{1}{i}\overline{\mathcal{F}}\left((\mathcal{F}(g))'\right) = -\frac{1}{i}(iT)\,\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g)) = T\,\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g))$$

Donc $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(0) = 0.$

III.5) $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel donc $f - f(0)f_0$ est dans $\mathcal{S}$

$(f - f(0)f_0)(0) = 0$ $\quad (f_0(0) = 1)$ donc.

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f - f(0)f_0)) = 0 = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(0) - f(0)\,\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f_0))(0)$$

$$0 = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(0) - f(0)\underbrace{f_0(0)}_{=1}$$

On a bien $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(0) = f(0).$

III.6 Prenons x dans $\mathbb{R}$ et $g = \tau_{-x}(f)$. Alors $g(0) = f(x)$

et $\mathcal{F}(g) = e_{+x}\,\mathcal{F}(f)$ (d'après II.4.a).

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g)) = \overline{\mathcal{F}}(e_{+x}\mathcal{F}(f)) = \tau_{-x}(\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))) \qquad (*)$$

En effet $\overline{\mathcal{F}}(e_x h)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} e^{ixt} h(t)\,dt = \overline{\mathcal{F}}(h)(y+x)$

donc $\overline{\mathcal{F}}(e_x h) = \tau_{-x}(\overline{\mathcal{F}}(h)).$

De $(*)$ il découle immédiatement

$$f(x) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g))(0) = \tau_{-x}(\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)))(0) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(x)$$

Ce qui est bien

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f.$$