

Première partie.

1.a) Si $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha]) \leq n < +\infty$, alors la famille $(1, \alpha, \dots, \alpha^n)$ est liée ($n+1$ éléments) donc il existe $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n = 0$.
le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ est donc un élément non nul de $I_{\mathbb{K}}(\alpha)$.

On a donc prouvé (i) $\Rightarrow$ (ii)

Réciproquement, supposons $I_{\mathbb{K}}(\alpha) \neq \{0\}$ il existe alors $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$.

Soit β dans $\mathbb{K}[\alpha]$ $\exists d \in \mathbb{N}$ $(b_0, \dots, b_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que $\beta = b_0 + b_1 \alpha + \dots + b_d \alpha^d = Q(\alpha)$ avec $Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_d X^d$.

On effectue la division euclidienne de Q par P .

$$Q = PR + S \quad \text{avec} \quad \deg S < n.$$

$$\text{Or a} \quad \beta = Q(\alpha) = P(\alpha)R(\alpha) + S(\alpha) = S(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \alpha^k$$

$$\text{Donc} \quad \mathbb{K}[\alpha] \subset \text{Vect}\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\} \subset \mathbb{K}[\alpha]$$

$$\text{et par conséquent} \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha] \leq n-1.$$

On a prouvé (ii) $\Rightarrow$ (i)

$$\text{I.b)} \begin{cases} - 0 \in I_{\mathbb{K}}(\alpha) \\ - \forall (P, Q) \in I_{\mathbb{K}}(\alpha) \quad P(\alpha) + Q(\alpha) = 0 \quad \text{donc} \quad P+Q \in I_{\mathbb{K}}(\alpha) \\ - \forall P \in I_{\mathbb{K}}(\alpha) \quad \forall Q \in \mathbb{K}[X] \quad (PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha) = 0 \quad \text{donc} \quad PQ \in I_{\mathbb{K}}(\alpha) \end{cases}$$

Il résulte de ces trois propriétés que $I_{\mathbb{K}}(\alpha)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$ car α est algébrique. On sait alors qu'il est engendré par un unique polynôme unitaire P .

$$I_K(\alpha) = P | K[X].$$

(2)

P est irréductible, en effet sinon $P = P_1 P_2$ avec.

$$P_1 \neq 0 \quad P_2 \neq 0, \quad \text{et } \deg P_1 < \deg P \quad \deg P_2 < \deg P$$

$$\text{or } P(\alpha) = 0 \text{ donc } P_1(\alpha) P_2(\alpha) = 0. \text{ Donc } P_2(\alpha) = 0$$

(par exemple) et par conséquent $P_2 \in I_K(\alpha)$ donc

$P | P_2$, mais $P_2 \neq 0$ donc $\deg P_2 \geq \deg P$. Il y a

une contradiction. PS: Le raisonnement précédent ne s'applique pas à 1 qui n'est pas irréductible. Mais 1 n'annule aucun α , donc $P \neq 1$.

1.c) * L'argument utilisés en 1.a) pour prouver (ii) $\Rightarrow$ (i)

$$\text{prouve le } \dim K[\alpha] \leq \deg P = d$$

* De plus la famille $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$ est libre.

car sinon il existerait un polynôme R non nul de degré $< d$ tel que $R(\alpha) = 0$ (ce qui est impossible, argument vu en 1.b). Donc $\dim K[\alpha] \geq d$ et finalement

$$\dim K[\alpha] = \deg P$$

1.d) Soit β un élément non nul de $K[\alpha]$, on peut

$$\text{écrire } \beta = b_0 + b_1 \alpha + \dots + b_{d-1} \alpha^{d-1} = R(\alpha) \text{ avec}$$

$$R \neq 0 \text{ et } \deg R < \deg P.$$

Puisque P est irréductible R et P sont premiers entre

eux. D'après le théorème de Bézout il existe donc

U et V dans $K[X]$ tels que

$$\underline{U R + V P = 1.}$$

$$\text{On en déduit } U(\alpha) R(\alpha) + \underbrace{V(\alpha) P(\alpha)}_{=0} = 1$$

donc $U(\alpha)$ est un inverse dans $K[\alpha]$ de β

Tout élément non nul de l'anneau $K[\alpha]$ est inversible

donc $K[\alpha]$ est un corps.

PS L'énoncé ne dit pas que $K[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$

Il est néanmoins facile de vérifier que 1 est dans $K[\alpha]$ et que $K[\alpha]$ est stable par le produit.

2a) $\sqrt{2}$ est annulé par X^2-2 , donc le polynôme minimal de $\sqrt{2} = \alpha$ divise X^2-2 . (3)

Si X^2-2 n'était pas irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ il posséderait un facteur de degré 1. Il existerait donc

$$\frac{p}{q} \text{ dans } \mathbb{Q} \text{ avec } p \wedge q = 1 \text{ et } \frac{p^2}{q^2} = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{p^2}{q^2} - 2 = 0 &\Rightarrow p^2 = 2q^2 \\ &\Rightarrow 2 \mid p^2 \text{ et } p^2 = 2q^2 \\ &\Rightarrow 2 \mid p \text{ et } p^2 = 2q^2 \quad (\text{car 2 est premier donc } 2 \mid ab \Rightarrow 2 \mid a \text{ ou } 2 \mid b) \\ &\Rightarrow p = 2p' \text{ et } 4p'^2 = 2q^2 \\ &\Rightarrow p = 2p' \text{ et } 2p'^2 = q^2 \\ &\Rightarrow p = 2p' \text{ et } q = 2q' \quad (\text{raisonnement symétrique}) \\ \frac{p^2}{q^2} - 2 = 0 &\Rightarrow p \wedge q \geq 2 \quad \text{Contradiction.} \end{aligned}$$

2b) $\alpha^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \beta$ et $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ donc

$P = X^4 - X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de α .

P est irréductible.

+ Il ne possède pas de facteur de degré 1, sinon il posséderait une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$.

Or aurait $p^4 - p^2q^2 - q^2 = 0$ donc $q \mid p^4$ or $q \wedge p = 1$

d'après le théorème de Gauss donc $q \mid p^4 \Rightarrow q = \pm 1$, un raisonnement similaire donne $p = \pm 1$ donc finalement $\frac{p}{q} = \pm 1$, or ni 1 ni -1 n'est racine de P .

+ Si P se factorise en un produit de deux polynômes du deuxième degré, que l'on peut supposer unitaires, alors.

$$P = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$$

l'examen du coefficient de X^3 donc $c = -a$, ensuite celui de X donne $a(d-b) = 0$ c'est à dire $a = 0$ et dans ce cas

on doit avoir $b = d = -1$ ~~car $b \neq d$~~ $-b$ est racine rationnelle de $X^2 - X - 1$. le raisonnement précédent montre que c'est impossible; ou bien $b = d$ ce qui contredit $b = d = -1$.

$P = X^4 - X^2 - 1$ est irréductible et annule α , c'est son polynôme minimal.

3) Si P est irréductible, alors $\deg P \geq 1$ donc $P' \neq 0$ et $\deg P' < \deg P$. Donc P et P' sont premiers entre eux.

Il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ $UP + VP' = 1$.

Si $P(\alpha) = 0$ alors $U(\alpha)P(\alpha) + V(\alpha)P'(\alpha) = 1$, soit $V(\alpha)P'(\alpha) = 1$ en particulier $P'(\alpha) \neq 0$. Les zéros complexes de P sont donc simples. ~~terminer~~

4.a) On a vu que tout élément de $\mathbb{K}[\alpha]$ s'écrit sous la forme

$Q(\alpha)$. Définissons $\sigma_i : \mathbb{K}[\alpha] \rightarrow \mathbb{C}$

$$Q(\alpha) \mapsto Q(\lambda_i)$$

Il faut prouver que σ_i est bien définie.

← Point clé

Or si $Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha)$ alors $(Q_1 - Q_2)(\alpha) = 0$ donc

$P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ divise $Q_1 - Q_2$ et $Q_1 - Q_2 = Q_3 P_{\mathbb{K}}(\alpha)$.

On en déduit $Q_1(\lambda_i) - Q_2(\lambda_i) = Q_3(\lambda_i) \underbrace{P_{\mathbb{K}}(\alpha)(\lambda_i)}_{=0} = 0$

et on a bien $Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha) \Rightarrow Q_1(\lambda_i) = Q_2(\lambda_i)$ donc σ_i est bien défini.

Il est immédiat que σ_i est un morphisme d'algèbre

$(\sigma_i(P+Q) = \sigma_i(P(\alpha)) + \sigma_i(Q(\alpha))$ donc $\sigma_i(\beta + \gamma) = \sigma_i(\beta) + \sigma_i(\gamma)$
et de même $\sigma_i(1) = 1$ $\sigma_i(\beta\gamma) = \sigma_i(\beta)\sigma_i(\gamma)$

Si $\tilde{\sigma}_i$ est un morphisme d'algèbre tel que $\tilde{\sigma}_i(\alpha) = \lambda_i$

alors pour tout polynôme $\tilde{\sigma}_i(P(\alpha)) = P(\tilde{\sigma}_i(\alpha)) = P(\lambda_i)$

ce qui prouve $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i$ et l'unicité de σ_i

4.b) Si σ un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$

$$\text{on a } \underbrace{\sigma(P_{\mathbb{K}}(\alpha)(\alpha))}_{=0} = P_{\mathbb{K}}(\alpha)(\sigma(\alpha))$$

$$0 = P_{\mathbb{K}}(\alpha)(\sigma(\alpha))$$

donc il existe un i tel que $\sigma(\alpha) = \lambda_i$ et $\sigma = \sigma_i$

On obtient bien ainsi tous les morphismes de $\mathbb{K}$ -algèbres de $\mathbb{K}[\alpha]$ vers $\mathbb{C}$. Il en existe n car les racines de $P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ sont simples complexes.

5) - $\beta \in K[\alpha]$ et $K[\alpha]$ est une sous-algèbre donc (5)
 $K[\beta] \subset K[\alpha]$. En particulier $K[\beta]$ est un sous-espace
 vectoriel de $K[\alpha]$ et $\dim_K K[\beta] \leq \dim_K K[\alpha]$.

- Soit $P_K(\beta)$ le polynôme minimal de β (qui existe car
 $\dim_K K[\beta] < +\infty$).

On a $P_K(\beta) = 0$, donc puisque les σ_i sont des
 morphismes de K -algèbres :

$$\forall i \quad P_K(\beta)(\sigma_i(\beta)) = \sigma_i(P_K(\beta)(\beta)) = 0$$

Donc $P_K(\beta)$ possède au moins n racines distinctes
 donc $\dim K[\beta] = \deg P_K(\beta) \geq n = \dim K[\alpha]$

- En récapitulant $K[\beta] \subset K[\alpha]$ et $\dim_K K[\beta] = \dim_K K[\alpha]$
 donc $K[\beta] = K[\alpha]$

6) Pour tout couple i, j , avec $i \neq j$, $\sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha)$.

Donc si $i \neq j$ et $\sigma_i(\beta) = \sigma_j(\beta) \quad \forall \lambda \in K \quad \sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_i(\alpha) + \lambda\sigma_i(\beta) \neq \sigma_j(\alpha + \lambda\beta)$
 et si $\sigma_i(\beta) \neq \sigma_j(\beta) \quad \sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha)}{\sigma_j(\beta) - \sigma_i(\beta)}$.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de λ dans K pour lesquels
 il existe un couple (i, j) avec $i \neq j$ et $\sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta)$.

Or K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, il contient donc au moins $\mathbb{Q}$ et
 en particulier il est infini.

Il existe donc au moins λ_1 et λ_2 distincts, dans K et tels
 que : $\forall i, j \quad i \neq j \quad \sigma_i(\alpha + \lambda_1\beta) \neq \sigma_j(\alpha + \lambda_1\beta), \sigma_i(\alpha + \lambda_2\beta) \neq \sigma_j(\alpha + \lambda_2\beta)$

$$\text{Prendons } \beta_1 = \frac{\alpha + \lambda_1\beta}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \beta_2 = \frac{\alpha + \lambda_2\beta}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Or si $i \neq j \quad \sigma_i(\beta_1) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sigma_i(\alpha + \lambda_1\beta) \neq \sigma_j(\beta_1)$ et de même $\sigma_i(\beta_2) \neq \sigma_j(\beta_2)$

Donc $K[\beta_1] = K[\alpha] \quad K[\beta_2] = K[\alpha]$ et $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

Troisième partie.

⑥

7) $\mathbb{Q}[\alpha]$ est corps (question 1.d) contenu dans K . K est donc bien un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}[\alpha]$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille $\mathbb{Q}$ -libre d'éléments de K elle est aussi $\mathbb{Q}$ -libre car $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\alpha]$. Donc $n \leq \dim_{\mathbb{Q}}(K)$. Toute famille $\mathbb{Q}[\alpha]$ -libre d'éléments de K possède au plus $\dim_{\mathbb{Q}}(K)$ éléments. K est donc un $\mathbb{Q}[\alpha]$ -espace vectoriel de dimension finie et $\dim_{\mathbb{Q}[\alpha]} K \leq \dim_{\mathbb{Q}} K$. Ceci justifie l'existence de d et de la base $(e_1, \dots, e_d)$.

* Soit x dans K . On peut écrire $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ où chaque x_i est dans $\mathbb{Q}[\alpha]$ et peut donc s'écrire $x_i = \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \alpha^j, a_{i,j} \in \mathbb{Q}$.
 x peut donc s'écrire $\sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \alpha^j e_i, a_{i,j} \in \mathbb{Q}$. La famille $(\alpha^j e_i)_{1 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq m-1}$ est donc une famille $\mathbb{Q}$ -génératrice

de K .
 * Si $\sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \alpha^j e_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^d \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \alpha^j \right)}_{x_i} e_i = 0$

et $x_i \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et $(e_1, \dots, e_d)$ est libre, donc $\forall i, x_i = 0$
 ensuite $\forall i, \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \alpha^j = 0$ et $a_{i,j} \in \mathbb{Q}$ et $(1, \alpha, \dots, \alpha^{m-1})$ est libre

donc $\forall i, j, a_{i,j} = 0$.

La famille $(\alpha^j e_i)_{1 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq m-1}$ est donc $\mathbb{Q}$ -libre.

Finalement cette famille est une $\mathbb{Q}$ -base de K et on obtient

$$\underline{\dim_{\mathbb{Q}} K = \dim_{\mathbb{Q}[\alpha]} K \times \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha].}$$

8.a) Ordonnons clairement la base de la question précédente (7)
 en $\beta = (e_1, \alpha e_1, \dots, \alpha^{m-1} e_1, e_2, \alpha e_2, \dots, \alpha^{m-1} e_2, \dots, e_d, \dots, \alpha^{m-1} e_d)$

$$\text{si } 0 \leq j < m-1 \quad \alpha(\alpha^j e_i) = \alpha^{j+1} e_i$$

$$j = m-1 \quad \alpha(\alpha^{m-1} e_i) = \alpha^m e_i = \left(-\sum_{k=0}^{m-2} a_k \alpha^k\right) e_i$$

$$\text{si } P_Q(\alpha) = X^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$$

La matrice de M_α dans la base β est donc une matrice diagonale par blocs

$$M = \begin{pmatrix} C & & 0 \\ 0 & C & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{où } C \text{ est}$$

la matrice compagnon

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & -a_{m-1} \end{pmatrix}, \text{ donc.}$$

$$\Delta_\alpha = \left(P(\Delta_C) \right)^d \quad \text{avec} \quad \Delta_C = \det(XI_m - C) = \begin{vmatrix} X & & a_0 \\ -1 & & a_1 \\ & \ddots & \\ -1 & X + a_{m-1} \end{vmatrix}$$

Pour calculer Δ_C on effectue l'opération sur les lignes

$L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \dots + X^{m-1} L_m$, puis on développe par rapport à la première ligne dont seul le dernier coefficient est maintenant non nul.

$$\Delta_C = (-1)^{m+1} \underbrace{(a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m)}_{P_Q(\alpha)} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & & -1 \end{vmatrix}}_{(-1)^{m-1}}$$

$$\text{Donc } \Delta_C = P_Q(\alpha) \text{ et } \Delta_\alpha = (P_Q(\alpha))^d$$

8.b) $T_2(M_\alpha) = d \operatorname{Tr}(C) = d a_{m-1} = d \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \right)$ où

les α_i sont des racines (distinctes de $P_Q(\alpha)$). Si on remarque maintenant qu'on peut écrire $Q = \beta_1 + \beta_2$ avec $\mathbb{Q}[\beta_1] = \mathbb{Q}[\beta_2] = K$

et que $M_\alpha = M_{\beta_1} + M_{\beta_2}$ et donc $T_2(M_\alpha) = \operatorname{Tr}(M_{\beta_1}) + \operatorname{Tr}(M_{\beta_2})$.

avec $\operatorname{Tr}(M_{\beta_1}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\beta_1)$ $\operatorname{Tr}(M_{\beta_2}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\beta_2)$ on obtient

$$\text{bien } \operatorname{Tr}(M_\alpha) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\beta_1) + \sigma_i(\beta_2) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\alpha)$$

9) $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k(\alpha_i \alpha_j) \right) = \det \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k(\alpha_i) \sigma_k(\alpha_j) \right)$ (8)

Si on considère la matrice $S_\alpha = (\sigma_i(\alpha_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ on aura

$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det({}^t S_\alpha S_\alpha) = \det({}^t S_\alpha) \det(S_\alpha) = \det(S_\alpha)^2 = (\det(\sigma_i(\alpha_j)))^2$

10) On a $\sigma_i(\beta_j) = \sum_{p=1}^n \sigma_i(\alpha_p) A_{j,p}$ (car $A_{j,p} \in \mathbb{Q}$)

donc $S_\beta = S_\alpha {}^t A$ et $\det S_\beta = (\det S_\alpha) \det A$

on aura bien $D(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\det A)^2 D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

11) $D(1, \theta, \dots, \theta^{n-1})$ ~~est le déterminant~~ vaut $(V(\sigma_1(\theta), \dots, \sigma_n(\theta)))^2$

où $V(\sigma_1(\theta), \dots, \sigma_n(\theta))$ est le déterminant de Vandermonde.

$D(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = \left(\prod_{i < j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)) \right)^2$

or $\prod_{i > j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i < j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta))$

et finalement $D(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta))$

12) $(1, \theta, \dots, \theta^{n-1})$ est une $\mathbb{Q}$ -base de K , on peut donc

écrire $\forall i \quad \alpha_i = \sum_{p=1}^n A_{i,p} \theta^p$ ($A_{i,p} \in \mathbb{Q}$) et

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une base de K si A est inversible.

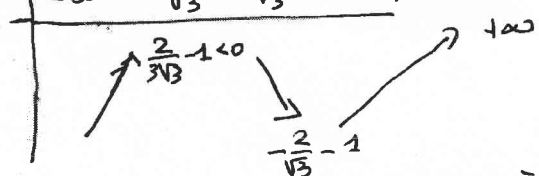
Or $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\det A)^2 D(1, \dots, \theta^{n-1})$ et $D(1, \dots, \theta^{n-1}) \neq 0$

car les $\sigma_i(\theta)$ sont distincts, par conséquent!

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une $\mathbb{Q}$ -base de K si $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$.

13, a) L'étude de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x - 1$, avec $f'(x) = 3x^2 - 1$ est résumée

dans le tableau de variations:



le théorème de la bisection montre qu'elle possède un unique zéro, appartenant à $]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$.

13.b) $P = X^3 - X - 1$ annule θ . Il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (9)

(Si on lui possédait un facteur de degré 1, donc une racine rationnelle qui ne pourrait être que 1 ou -1 (idem 2.b) (ce qui n'est pas le cas).

On a donc $P_{\mathbb{Q}}(\theta) = X^3 - X - 1$.

13.c) $D(1, \theta, \theta^2) = (-1)^{\frac{3 \cdot 2}{2}} \prod_{i \neq j} (\theta_i - \theta_j)$ où θ_1, θ_2 et θ_3 sont

les racines complexes de $P_{\mathbb{Q}}(\theta)$.

$$P_{\mathbb{Q}}(\theta) = \prod_{j=1}^3 (X - \theta_j) \quad P'_{\mathbb{Q}}(\theta) = \sum_{k=1}^3 \prod_{j \neq k} (X - \theta_j)$$

donc $P'_{\mathbb{Q}}(\theta_i) = \prod_{j \neq i} (\theta_i - \theta_j)$ et finalement

$$\begin{aligned} D(1, \theta, \theta^2) &= - \prod_{i=1}^3 P'(\theta_i) = - (3\theta_1^2 - 1)(3\theta_2^2 - 1)(3\theta_3^2 - 1) \\ &= - [27(\theta_1\theta_2\theta_3)^2 - 9(\theta_1^2\theta_2^2 + \theta_1^2\theta_3^2 + (\theta_2\theta_3)^2) \\ &\quad + 3(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - 1] \end{aligned}$$

Or $\theta_1\theta_2\theta_3 = -(-1) = 1$ $\theta_1^2\theta_2^2 + (\theta_1\theta_3)^2 + (\theta_2\theta_3)^2 = (\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1)^2 - 2\theta_1\theta_2\theta_3(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

$$\theta_1^2\theta_2^2 + (\theta_1\theta_3)^2 + (\theta_2\theta_3)^2 = (-1)^2 - 2(-1)(0) = 1$$

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^2 - 2(\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1) = 0^2 - 2(-1) = 2$$

Finalement :

$$D(1, \theta, \theta^2) = - [27 - 9 + 8 - 1] = -23$$