**ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES**

# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – C – (ULCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on notera $\lfloor y \rfloor$ la **partie entière** de $y$, c'est-à-dire l'unique entier relatif $\lfloor y \rfloor \in \mathbf{Z}$ tel que $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}$, on notera $\mathbf{1}_A$ sa fonction caractéristique.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on notera $|z|$ le module de $z$. On notera $\ell^1(\mathbf{Z})$ l'ensemble des suites de nombres complexes $(z_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ telles que $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |z_k| < +\infty$.

On dira qu'une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est **périodique de période** $T > 0$ si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$. Dans ce problème, on supposera toujours que $T = 1$ et on dira simplement qu'une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est **périodique** si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x+1) = f(x)$. On notera $\mathcal{C}_{\text{per}}$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continues et périodiques muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|.$$

Si $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est une fonction continue et périodique que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, on notera $f^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbf{N}$, la dérivée $m$-ième de $f$ qui appartient encore à l'espace $\mathcal{C}_{\text{per}}$. On rappelle qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_{\text{per}}$ **converge uniformément** vers $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ lorsque $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on notera $e_k \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par

$$e_k(x) = \exp(2\pi \mathrm{i} k x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit $c_k(f) \in \mathbf{C}$, le $k$-ième **coefficient de Fourier** de $f$, par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(y) e_{-k}(y) \, \mathrm{d}y.$$

Pour tous $n, N \in \mathbf{N}$, on définit les fonctions $S_n(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ et $\sigma_N(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \quad \text{et} \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f).$$

Le sujet est composé de cinq parties. Les résultats de la partie **I** seront utilisés dans la partie **II**. Les résultats de la partie **II** seront utilisés dans les parties **III** et **V**. Les résultats de la partie **III** seront utilisés dans la partie **IV**.

## I. Préliminaires

Le but de cette partie est d'étabir des résultats préliminaires qui seront utiles dans la partie **II**.

**(I.1)** Soit $f : [0,1] \to \mathbf{C}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit $\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\widetilde{f}(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.

**(I.2)** Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

**(I.3)** Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $z \in \mathbf{C}$. Montrer que la suite de nombres complexes $(Z_N)_{N\in\mathbf{N}}$ definie par

$$Z_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} z_n$$

converge aussi vers $z$.

## II. Théorème de Fejér et applications

Le but de cette partie est de démontrer le Théorème de Fejér qui affirme que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est la limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$.

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $K_N \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par

$$K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

**(II.1)** Soit $N \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\int_0^1 K_N(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

**(II.2)** Soient $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$. Montrer que

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2.$$

**(II.3)** Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Soient $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

**(II.3.a)** Montrer que

$$\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(y)K_N(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

**(II.3.b)** En déduire que

$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-y) - f(x))K_N(y)\,\mathrm{d}y.$$

**(II.4)** **Théorème de Fejér**. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.

**(II.4.a)** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_0^{\delta} |f(x-y) - f(x)|K_N(y)\,\mathrm{d}y \le \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{1-\delta}^{1} |f(x-y) - f(x)|K_N(y)\,\mathrm{d}y \le \varepsilon.$$

**(II.4.b)** Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $\kappa_{\delta,f} > 0$ (qui dépend de $\delta$ et de $f$) telle que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_{\delta}^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)| K_N(y)\,\mathrm{d}y \leq \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

**(II.4.c)** En déduire que la suite de fonctions $(\sigma_N(f))_{N\geq 1}$ converge uniformément vers $f$.

**(II.5)** Soit $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{per}}$ une fonction que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

**(II.5.a)** Soient $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Établir une relation entre les coefficients de Fourier $c_k(f)$ et $c_k(f^{(n)})$.

**(II.5.b)** En déduire que $(c_k(f))_{k\in\mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$.

**(II.5.c)** Montrer que la suite de fonctions $(S_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f$.

## III. Équirépartition

Le but de cette partie est d'étudier l'équirépartition modulo 1 des suites de nombres réels.

Pour tout sous-ensemble fini $X \subset \mathbf{N}$, on notera $\sharp X$ le cardinal de l'ensemble $X$. Pour tout entier $N \geq 1$, on notera simplement $[\![1, N]\!] = \{k \in \mathbf{N} : 1 \leq k \leq N\}$. Pour tout entier $N \geq 1$, toute suite de nombres réels $(x_n)_{n\geq 1}$ et tout sous-ensemble non vide $Y \subset [0,1]$, on notera

$$\gamma(N, (x_n), Y) = \frac{1}{N} \sharp \{1 \leq n \leq N : x_n - \lfloor x_n \rfloor \in Y\}.$$

On dira qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\geq 1}$ est **équirépartie** si pour tous $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \gamma(N, (x_n), [a,b]) = b - a.$$

**(III.1)** Montrer qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie si et seulement pour tous $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \gamma(N, (x_n), [a,b[) = b - a.$$

**(III.2)** Soit $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{per}}$. Pour tout entier $M \geq 1$, on notera

$$\Phi_M(f) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \sum_{j=0}^{M-1} f\left(k + \frac{j}{M}\right) \mathbf{1}_{[k+\frac{j}{M}, k+\frac{j+1}{M}[}.$$

**(III.2.a)** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $M \geq 1$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x) - \Phi_M(f)(x)| \leq \varepsilon.$$

**(III.2.b)** Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels équirépartie. En déduire que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{$*$}$$

**(III.3)** On se propose de montrer la réciproque de la question III.2. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels qui vérifie $(*)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{per}}$. Soient $0 \leq a < b \leq 1$.

**(III.3.a)** Étant donné $\varepsilon > 0$, en vous aidant d'un dessin, construire des fonctions $f_\varepsilon^-, f_\varepsilon^+ \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ telles que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f_\varepsilon^-(x) \leq \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \leq f_\varepsilon^+(x)$$

et

$$\int_0^1 \left(f_\varepsilon^+(y) - f_\varepsilon^-(y)\right) \mathrm{d}y \leq \varepsilon.$$

**(III.3.b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

**(III.4)** Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que pour tout $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(x_n) = 0.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

**(III.5)** Soient $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et $x \in \mathbf{R}$. Montrer que la suite $(\alpha n + x)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

**(III.6)** Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par $F_n(x) = f(\alpha n + x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n \right\|_\infty = 0.$$

## IV. Théorème de Weyl

Le but de cette partie est de démontrer le **Théorème de Weyl** qui affirme que pour tout polynôme de degré $d \geq 1$ à coefficients réels $P(X) = \alpha_d X^d + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\alpha_d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, la suite de nombres réels $(P(n))_{n\geq 1}$ est équirépartie.

**(IV.1) Inégalité de van der Corput.** Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes tels que $|z_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Soient $1 \leq H \leq N$.

**(IV.1.a)** Montrer que

$$\left| \sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right| \leq H + 1.$$

**(IV.1.b)** Montrer que

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n \right| \leq \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{H} \left( \sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

**(IV.1.c)** En écrivant

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{h,h'=1}^{H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} |z_{n+h}|^2 + 2\sum_{n=1}^{N} \sum_{1\leq h'<h\leq H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}},$$

et en effectuant un changement de variables approprié, montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 \leq NH + 2H \sum_{h=1}^{H} \left| \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n} \right| + H^2(H+1).$$

**(IV.1.d)** En déduire que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leq \sqrt{2}\left(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right|\right)^{1/2} + \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{H+1}{N}\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

**(IV.2) Lemme de van der Corput.** Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tels que pour tout $h \geq 1$, la suite de nombres réels $(x_{n+h} - x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

**(IV.3)** Démontrer le **Théorème de Weyl** en raisonnant par récurrence sur le degré $d \geq 1$.

## V. Approximation rationnelle et équirépartition quantitative

Le but de cette partie est d'étudier l'approximation des nombres réels par les nombres rationnels et les liens avec l'équirépartition.

On dira qu'un nombre réel $\alpha$ est de **Liouville** si pour tout entier $n \geq 1$, il existe un couple $(p_n, q_n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{N} \setminus \{0, 1\})$ tel que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left(\frac{1}{q_n}\right)^n.$$

On dira qu'un nombre réel $\alpha$ est **algébrique** s'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ non constant tel que $P(\alpha) = 0$.

**(V.1)** Montrer qu'un nombre réel de Liouville est irrationnel.

**(V.2) Théorème de Liouville.**

**(V.2.a)** Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tel qu'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ irréductible à coefficients entiers de degré $d \geq 2$ tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer qu'il existe une constante $c_\alpha > 0$ (qui dépend de $\alpha$) telle que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c_\alpha}{q^d} \quad \text{pour tout } (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*.$$

**(V.2.b)** En déduire qu'un nombre réel algébrique sur $\mathbf{Q}$ n'est pas de Liouville.

**(V.2.c)** Montrer que le nombre réel

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

n'est pas algébrique.

**(V.3) Équirépartition quantitative.** Dans cette question, on prouve une version quantitative de la convergence de la question III.6.

Soit $\alpha$ un nombre irrationnel qui n'est pas de Liouville. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ une fonction que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par $F_n(x) = f(\alpha n + x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Montrer qu'il existe une constante $C_{\alpha,f} > 0$ (qui dépend de $\alpha$ et de $f$) telle que

$$\left\|\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n\right\|_\infty \leq \frac{C_{\alpha,f}}{N} \quad \text{pour tout } N \geq 1.$$

*Indication : on pourra utiliser les résultats de la question* II.4.