ENS 2017 MP Mathématiques C (ULCR)

I Préliminaires

I.1) $\tilde{f}$ est périodique par construction, elle est continue sur $]0,1[$, qui est ouvert, donc en tout point de $]0,1[$.

$\lim_{x\to 0^+} \tilde{f}(x) = f(0)$ $\quad \lim_{x\to 0^-} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0^-} f(1+x) = f(1) = f(0) = \tilde{f}(0)$

donc $\tilde{f}$ est continue en 0.

$\tilde{f}$ est continue en tout point de $[0,1[$ et périodique, donc continue sur $\mathbb{R}$.

I.2) Soit f dans $\mathscr{C}_{per}$. f est continue, donc $f_{|[-1,2]}$ est uniformément continue.

Soit $\varepsilon>0$ $\quad \exists \eta>0 \quad \forall (x,y)\in[-1,2]^2 \quad |x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Soit $\eta' = \min(\eta, 1)$, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $|x-y|<\eta'$ et

$x' = x - \lfloor x \rfloor \quad y' = y - \lfloor y \rfloor$.

Alors $x'\in[0,1[\subset[-1,2]$ $y'\in[-1,2]$ car $|x'-y'| = |x-y| < 1$.

et $|x'-y'| = |x-y| < \eta$. Donc $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |f(x')-f(y')| < \varepsilon$.

Finalement

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta' \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad |x-y|<\eta' \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ et

f est uniformément continue.

I.3) C'est le lemme de Cesàro.

Soit $\varepsilon>0$ $\quad \exists n_0 \quad \forall n\geqslant n_0 \quad |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$. On fixe un tel n_0

$\forall N\geqslant n_0 \quad |Z_N - z| = \left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(z_n - z)\right| \leqslant \frac{\sum_{n=0}^{n_0-1}|z_n - z|}{N+1} + \frac{N-n_0+1}{N+1}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{K}{N+1} + \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{K}{N+1} = 0$ $\quad$ donc $\exists n_1\geqslant n_0 \ \forall N\geqslant n_1 \quad \frac{K}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_1 \quad \forall N\geqslant n_1 \quad |Z_N - z| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ceci veut bien dire $\lim_{N\to+\infty} Z_N = z$

II Théorème de Fejèr et applications

II. 1)

$$\int_0^1 e_k(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ \left[\frac{1}{2ik\pi} e^{2ik\pi x}\right]_0^1 = 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Puis, par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 K_N(x)\,dx = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 e_k(x)\,dx = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} 1 = 1.$$

II. 2)

$$\sum_{k=-n}^{n} e_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{2i\pi x}\right)^k. \quad \text{Or } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z} \text{ donc } e^{2i\pi x} \neq 1$$

et

$$\sum_{k=-n}^{n} e_k(x) = \left(e^{2i\pi x}\right)^{-n} \frac{1-\left(e^{2i\pi x}\right)^{2n+1}}{1-e^{2i\pi x}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{2i\pi x}} \left(\left(e^{-2i\pi x}\right)^n - \left(e^{2i\pi x}\right)^{n+1} \right)$$

$$K_N(x) \; \frac{1}{(N+1)} \frac{1}{1-e^{2i\pi x}} \left(\sum_{n=0}^{N} \left(e^{-2i\pi x}\right)^n - \sum_{n=0}^{N} \left(e^{2i\pi x}\right)^{n+1} \right).$$

$$K_N(x) = \frac{1}{(N+1)} \frac{1}{1-e^{2i\pi x}} \left(\frac{1-\left(e^{-2i\pi x}\right)^{N+1}}{1-e^{-2i\pi x}} - \frac{e^{2i\pi x} - e^{2i\pi x(N+1)}}{1-e^{2i\pi x}} \right)$$

$$\cancel{= \frac{1}{(N+1)} \frac{1}{e^{i\pi x}(-2i\sin\pi x)} \left(\frac{e^{-i\pi x(N+1)}(2i\sin(N+1}{e^{-i\pi x}(2i\sin\pi x)} \right.}$$

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \frac{-1}{\left(1-e^{2i\pi x}\right)^2} \left(e^{2i\pi x} - e^{(-2i\pi x)N} + e^{2i\pi x} - e^{2i\pi x.(N+1)} \right)$$

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \frac{e^{2i\pi x}}{\left(e^{2i\pi x}-1\right)^2} \left(e^{2i\pi x(N+1)} - 2 + e^{-(2i\pi x)N+1} \right)$$

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \frac{1}{\left(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}\right)^2} \left(e^{i\pi x(N+1)} - e^{-(i\pi x)(N+1)} \right)^2$$

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \frac{1}{(2i\sin\pi x)^2} \left(2i\sin(N+1)\pi x\right)^2 = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2(N+1)\pi x}{\sin^2 \pi x}.$$

II.3a) $\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{r=0}^{N} \sum_{k=-r}^{r} c_k(f) e_k$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{r=0}^{N} \sum_{k=-r}^{r} \int_0^1 f(y) e^{-2ik\pi y} dy \, e^{2ik\pi x}.$$

Par linéarité de l'intégrale.

$$\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(y) \sum_{r=0}^{N} \sum_{k=-r}^{r} e^{2ik\pi(x-y)} dy$$

$$\underline{\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(y) K_N(x-y) dy.}$$

II.3.b) Puisque d'après II.1) $f(x) = \int_0^1 f(x) K_n(y) dy$ d'une part et que d'autre part le changement de variable $z = x-y$ donne

$$\sigma_N(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(x-z) K_r(z) dz = \int_0^1 f(x-y) K_N(y) dy$$

par périodicité de f et K_N (l'intégrale sur une période ne dépend pas de l'origine de la période).

Par soustraction on obtient

$$\underline{\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-y) - f(x))}$$

II.4a) f est uniformément continue, donc pour $\varepsilon > 0$ donné il existe δ tel que $|z-t| \leq \delta \Rightarrow |f(z) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

en particulier $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in [0, \delta]$ $|f(x-y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

et $\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)| K_N(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\delta K_N(y) dy$ (car $K_r(y) \geq 0$)

$$\underline{\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)| K_n(y) dy. \leq \frac{\varepsilon}{2}}$$ car $K_N \geq 0$ et $\int_0^1 K_r(y) dy = 1$

De même si $y \in [1-\delta, 1]$ $|x+1-y-x| \leq \delta$ donc $|f(x-y) - f(x-1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$|f(x-y) - f(x-1)| = |f(x-y) - f(x)|.$$

On obtient de même $\underline{\int_{1-\delta}^{1} |f(x-y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}}$

II.4.b) $\displaystyle\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y)-f(x)| K_N(y)\,dy \le 2\|f\|_\infty \int_\delta^{1-\delta} K_N(y)\,dy$

$$\le 2\|f\|_\infty (1-2\delta) \sup_{y\in[\delta,1-\delta]} \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin^2 \pi y (N+1)}{\sin^2 \pi y}\right)$$

$$\le 2\|f\|_\infty \times 1 \times \frac{1}{(N+1)\sin^2 \pi\delta}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y)-f(x)| K_N(y)\,dy \le \frac{K_{\delta,f}}{N+1}$ avec $K_{\delta,f} = \dfrac{2\|f\|_\infty}{\sin^2 \pi\delta}$.

II.4.c) On finit avec le même schéma que dans la démonstration du théorème de Cesaro

$\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle |\sigma_n(f)(x) - f(x)| = \left|\int_0^1 (f(x-y)-f(x)) K_N(y)\,dy\right|$

$$\le \int_0^1 |f(x-y)-f(x)| K_N(y)\,dy$$

Soit $\varepsilon > 0$ et δ choisit comme ci-dessus. En utilisant la relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^1 = \int_0^\delta + \int_\delta^{1-\delta} + \int_{1-\delta}^1$ on obtient

$\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon + \frac{K_{\delta,f}}{N+1} + \varepsilon.$

$\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$ $\dfrac{K_{\delta,f}}{N+1} \le \varepsilon.$

Finalement

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall N \geq n_0$ $|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \le 3\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall N \geq n_0$ $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \le 3\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1$ $\forall N \geq n_1$ $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty < \varepsilon.$

ceci dit bien que $(\sigma_N(f))_{N\geq 0}$ converge uniformément vers f.

II.5.a) $$c_k(f') = \int_0^1 e^{-2i\pi k x} f'(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[f(x) e^{-2i\pi k x} \right]_0^1}_{=0 \text{ par périodicité}} + 2i\pi k \int_0^1 e^{-2i\pi k x} f(x)\,dx.$$

$$c_k(f') = (2i\pi k)\, c_k(f).$$

Par récurrence. $c_k(f^{(n)}) = (2i\pi k)^n c_k(f).$

II.5.b) On aura par exemple $\forall k \neq 0 \quad c_k(f) = -\dfrac{c_k(f'')}{4\pi^2} \times \dfrac{1}{k^2}$

Or $|c_k(f'')| \leq \int_0^1 |f''(y)|\,dy \leq \|f''\|_\infty$, donc

$c_k(f) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

II.5.c) Les séries de fonctions $\sum_{k\geq 0} c_k(f) e_k$ et $\sum_{k\geq 1} c_{-k}(f) e_{-k}$ convergent normalement (car $\|c_k(f) e_k\|_\infty = |c_k(f)| = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$).

Donc $S_n(f)$ converge uniformément vers une fonction g.

Elle converge simplement vers cette fonction g. Ceci veut dire $\forall x \in \mathbb{R}$ $(S_n(f)(x))_{n\geq 0}$ converge vers $g(x)$.

Donc d'après le lemme de Cesàro $\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f)(x) = g(x)$.

Or $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f donc aussi simplement vers f et par conséquent $f = g$.

(On remarquera qu'on n'a pas besoin de f $\mathcal{C}^\infty$, f $\mathcal{C}^2$ suffit.

Une version un peu plus poussée (Mines 2015) montrerait que f $\mathcal{C}^1$ suffit pour obtenir la convergence uniforme de $S_N(f)$ vers f.)

Rq : Le sujet démontre Cesàro pour une suite de nombre complexe. La démonstration aurait été la même ~~dans~~ un espace normé quelconque. Ce qui nous aurait évité le passage à la limite simple (deux fois) dans la démonstration.

III. Equirépartition

III.1) Commençons par un lemme préliminaire. On suppose que $\forall a,b$, $0 \leq a < b \leq 1$ $\lim\limits_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[a,b]) = b-a$.

ou $\forall a,b$, $a \leq 0 < b \leq 1$ $\lim\limits_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[a,b[) = b-a$

~~et~~ montrons que $\forall b \in [0,1]$ $\lim\limits_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),\{b\}) = 0$.

C'est clair pour $b=1$ car $\forall N$ $\gamma(N,(x_n),\{1\}) = 0$.

Supposons maintenant $b<1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $b+\frac{\varepsilon}{2} \leq 1$.

alors $0 \leq \gamma(N,(x_n),\{b\}) \leq \gamma(N,(x_n),[b,b+\frac{\varepsilon}{2}[) \leq \gamma(N,(x_n),[b,b+\frac{\varepsilon}{2}])$

or $\lim\limits_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[b,b+\frac{\varepsilon}{2}[) = \frac{\varepsilon}{2}$ (ou $\lim\limits_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[b,b+\frac{\varepsilon}{2}]) = \frac{\varepsilon}{2}$)

Donc il existe N_0 tel que $\forall N \geq N_0$ $0 \leq \gamma(N,(x_n),\{b\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$

Ceci dit bien $\lim\limits_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),\{b\}) = 0$.

Il ne reste plus qu'à écrire

$$\gamma(N,(x_n),[a,b]) = \gamma(N,(x_n),[a,b[) + \gamma(N,(x_n),\{b\})$$

pour obtenir l'équivalence des deux caractérisations.

III.2a) . $\Phi_n(f)$ est la fonction telle que $\Phi_n(f)(x) = f(k+\frac{j}{n})$ si $x \in [k+\frac{j}{n}, k+\frac{j+1}{n}[$, $k\in\mathbb{Z}$, $j \in [0,n-1[$ et pour un x donné un tel couple est unique.

. On f est uniformément continue donc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

On en déduit que si $\frac{1}{n} < \eta$ $(n > \frac{1}{\eta})$ on aura

$\forall x \in \mathbb{R}$ $|\Phi_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$, car $|k+\frac{j}{n}-x| \leq \frac{1}{n} < \eta$.

III.2b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} \Phi_n(f)(x_r) = \sum_{j=0}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right)\gamma\left(N,(x_r),\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right[\right)$

Donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} \Phi_n(f)(x_r) = \sum_{j=0}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right)\left(\frac{1}{M}\right)$.

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \left|\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right)\times\frac{1}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

(Somme de Riemann d'une fonction continue sur $[0,1]$)

~~Fixons cet tel n_0, il existe N_1 tel que~~

~~$\forall N \geq N_1 \quad \left|\frac{1}{N}\Phi\right.$~~

De même il existe n_1 tel que $\forall n \geq n_1 \quad \forall x \quad |\Phi_n(f)(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Donc en choisissant $n_2 = \max(n_0, n_1)$ on a

$$\left|\sum_{j=0}^{M_2} f\left(\frac{j}{n_2}\right)\times\frac{1}{n_2} - \int_0^1 f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} f(x_r) - \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\Phi_{n_2}(f)(x_r)\right| < \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus il existe N_2 tel que

$$\forall N \geq N_2 \quad \left|\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\Phi_{n_2}(f)(x_r) - \sum_{j=0}^{n_2-1} f\left(\frac{j}{n_2}\right)\times\frac{1}{M_2}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en déduit

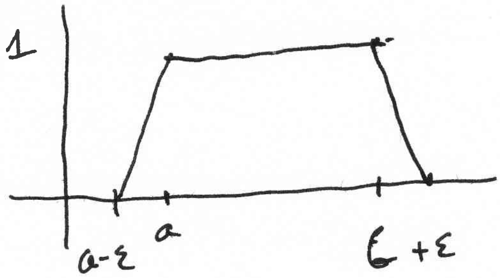
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_2 \quad \forall N \geq N_2$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} f(x_r) - \int_0^1 f(y)\,dy\right| \leq & \left|\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} f(x_r) - \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\Phi_{n_2}(f)(x_r)\right| \\ & + \left|\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\Phi_{n_2}(f)(x_r) - \sum_{j=0}^{n_2-1} f\left(\frac{j}{n_2}\right)\times\frac{1}{n_2}\right| \\ & + \left|\sum_{j=0}^{n_2-1} f\left(\frac{j}{n_2}\right)\times\frac{1}{n_2} - \int_0^1 f(y)\,dy\right|\end{aligned}$$

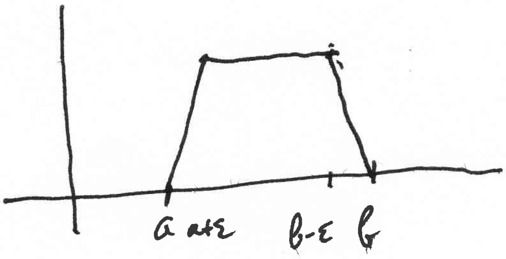
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} f(x_r) - \int_0^1 f(y)\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ce qui est bien $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} f(x_r) = \int_0^1 f(y)\,dy$.

III.3.a)



f_ε^+



f_ε^-

les fonctions sont prolongées par périodicité.
En cas de chevauchement on prend le sup pour f_ε^+ et l'inf pour f_ε^-

III.3b) $\gamma(N,(x_n),[a,b]) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1_{[a,b]}(x_n)$

Donc

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_\varepsilon^-(x_n) \leq \gamma(N,(x_n),[a,b]) \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_\varepsilon^+(x_n) \qquad (*)$$

Le résultat demandé en découle en découpant les ε en trois/deux comme nous l'avons déjà fait (plusieurs fois).
Dans un souci de rigueur rédigeons néanmoins la démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

$$\forall N \geq 1 \quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_{\varepsilon/3}^-(x_n) \leq \gamma(N,(x_n),[a,b]) \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_{\varepsilon/3}^+(x_n).$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_{\varepsilon/3}^+(x_n) = \int_0^1 f_{\varepsilon/3}^+(y)\,dy \leq (b-a) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$\left(\text{car } \int f_\varepsilon^-(y)\,dy \leq \int 1_{[a,b]}(y)\,dy = (b-a) \text{ et } \int_0^1 f_{\varepsilon/3}^+(y)\,dy \leq \int f_{\varepsilon/3}^-(y)\,dy + \frac{\varepsilon}{3}\right)$

Donc il existe N_+ tel que $\forall N \geq N_+$ $\quad \gamma(N,(x_n),[a,b]) \leq (b-a)+\varepsilon$

De même il existe N_- tel que $\forall N \geq N_-$ $\quad \gamma(N,(x_n),[a,b]) > (b-a)-\varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = \max(N_+, N_-) \quad \forall N \geq N_0 \quad |\gamma(N,(x_n),[a,b]) - (b-a)| < \varepsilon$

ce qui équivaut à $\lim_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[a,b]) = (b-a)$

c'est-à-dire à l'équirépartition de la suite (x_n).

III.4) On utilise le résultat de la question précédente. (9)

On va montrer que pour toute fonction f de $\mathcal{E}_{per}$.

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} f(x_r) = \int_0^1 f(y)\,dy.$$

Cela est vrai pour e_0 (identiquement égale à 1) et pour tout les e_k dans $\mathbb{Z}-\{0\}$ d'après l'hypothèse.

C'est vrai par linéarité pour tout les σ_p, $p\in\mathbb{N}^*$.

Soit
$$u_p : \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ N \to \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} \sigma_p(x_r) \end{array}$$

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ N \to \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} f(x_r) \end{array}$$

L'inégalité triangulaire donne immédiatement

$$\|u_p - u\|_{\infty,\mathbb{N}^*} \leq \|\sigma_p(f)-f\|_\infty \quad (= \|\sigma_p(f)-f\|_{\infty,\mathbb{R}})$$

Donc $(u_p)_{p\geq 1}$ converge uniformément vers u.

$$\forall\ p\in\mathbb{N}^* \quad \lim_{N\to+\infty} u_p(N) = \int_0^1 \sigma_p(y)\,dy = \frac{1}{p+1}\sum_{r=0}^{p} \int S_r(f) = c_0(f) = \int_0^1 f(y)dy$$

le théorème de permutation des limites permet d'affirmer

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} f(x_r) = \int_0^1 f(y)\,dy$$

q.e.d.

((ceux qui, comme l'auteur du sujet semble-t-il, ne dédaignent pas de découper des ε en 3 avaient ici une occasion supplémentaire de le faire. Voir la démonstration du cours)

III.5) $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ donc $\forall k \in \mathbb{Z}^*$ $k\alpha \notin \mathbb{Z}$ et $e^{ik\alpha} \neq 1$

Par conséquent $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(n\alpha + x) \right| = \left| \frac{e^{2ik\pi(\alpha+x)}}{N} \frac{1-e^{2i\pi k n}}{1-e^{ik\alpha\pi}} \right| \leq \frac{2}{N|1-e^{ik\alpha\pi}|}$

et par conséquent $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(n\alpha + x) = 0$

III.6) On a vu en III.2b) que $\sigma_M(f) = \int_0^1 f(y)\,dy + P_M(f)$ où $P_M(f)$ converge uniformément vers 0 et $P_M(f) = \sum_{\substack{k=-M \\ k\neq 0}}^{M} d_k(f) e_k$

la question précédente permet de prouver (grâce à la majoration indépendante de x) que $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P_M(f)(n\alpha + x)$ tend vers 0 uniformément.

Puisque $(\sigma_M(f))_{M\geq 1}$ converge uniformément vers f

et $\left\| \left(x \mapsto \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_M(f)(n\alpha+x)\right) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n \right\|_\infty \leq \| f - \sigma_M(f) \|_\infty$

et $\lim_{N\to+\infty} \left\| \left(x \mapsto \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_M(f)(n\alpha+x)\right) - \int_0^1 f(y)\,dy \right\|_\infty = 0$

un découpage de ε en deux, en choisissant M tel que

$\| f - \sigma_M(f) \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ puis N tel que $\left\| \left(x \mapsto \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_M(f)(n\alpha+x)\right) - \int_0^1 f(y)\,dy \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

donne.

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F_n - \int_0^1 f(y)\,dy \right\|_\infty = 0$$

q.e.d.

IV. le théorème de Weyl.

IV.1.a) $1 \le H \le N$ donc

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{H} z_{n+k} = \sum_{k=2}^{H} (k-1) z_k + H \sum_{k=H+1}^{N+1} z_k + \sum_{k=N+2}^{N+H} (N+H+1-k) z_k$$

$$\sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{H} z_{n+k} = \sum_{k=1}^{H} \left(1 - \frac{k-1}{H}\right) z_k - \frac{1}{H} \sum_{k=N+1}^{N+H} (N+H+1-k) z_k$$

$$\left| \sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{H} z_{n+k} \right| \le \frac{1}{H} \left(\sum_{k=1}^{H} (H-k+1) + \sum_{k=N+1}^{N+H} (N+H+1-k) \right)$$ si $\forall i$ $|z_i| \le 1$.

$$\left| \sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} z_{n+k} \right| \le \frac{1}{H} \left(\sum_{k=1}^{H} k + \sum_{k=1}^{H} k \right) = H+1$$

IV.1.b) $$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n \right| \le \frac{1}{N} \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{H} z_{n+k} \right|} + \frac{1}{NH} \left| \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{H} z_{n+k} \right|$$

$\le \frac{H+1}{N}$ d'après IV.1.a)

D'autre part l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii donne, pour tout N-uplet de complexes $(z_1, \quad, z_N)$

$$\left| \sum_{n=1}^{N} z_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} 1.\, z_n \right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{N} 1^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |z_n|^2} = \sqrt{N} \left(\sum_{n=1}^{N} |z_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'inégalité demandée en découle immédiatement.

IV.1.c) Soit $\alpha(N,H) = 2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{1 \le k' < k \le H} z_{n+k} \overline{z_{n+k'}}$

$$\alpha(N,H) = 2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{1 \le k' \le H-1} \sum_{k=1}^{H-k'} z_{n+k'+k} \overline{z_{n+k'}}$$

$$\alpha(N,H) = 2 \sum_{1 \le k' \le H-1} \sum_{k=1}^{H-k'} \sum_{n=1+k'}^{N+k'} z_{n+k} \overline{z_n}$$

$$\alpha(N,H) = 2 \sum_{k=1}^{H-1} \sum_{k'=1}^{H-k} \sum_{n=1+k'}^{N+k'} z_{n+k} \overline{z_n}$$

$$\alpha(N,H) = 2\sum_{k=1}^{H-1}\Bigg(\sum_{n=2}^{H-k}\sum_{k'=1}^{n-1} z_{n+k}\,\overline{z_n} + \sum_{n=H-k+1}^{N+1}\sum_{k'=1}^{H-k} z_{n+k}\,\overline{z_n} + \sum_{n=N+2}^{N+H-k}\sum_{k'=N-n}^{H-k} z_{n+k}\,\overline{z_n}\Bigg)$$

(Lorsque les indice de sommation $\sum_{i=a}^{b}\alpha_i$ vérifient $b<a$, la somme est nulle).

$$\alpha(N,H) = 2\Bigg(\sum_{k=1}^{H-1}\Bigg(\sum_{n=2}^{H-k}\sum_{k'=1}^{n-1} z_{n+k}\,\overline{z_n} + \sum_{n=1}^{H-k}\sum_{k'=1}^{H-k} z_{n+k}\,\overline{z_n} + \sum_{n=N+1}^{N+H-k}\sum_{k'=n-N}^{H-k} z_{n+k}\,\overline{z_n}\Bigg)\Bigg)$$

$$+\underbrace{2\sum_{k=1}^{H-1}\sum_{n=1}^{N}(H-k)\,z_{n+k}\,\overline{z_n}}_{=2\sum_{k=1}^{H}(H-k)\sum_{n=1}^{N} z_{n+k}\,\overline{z_n}}.$$

Donc si $|z_i|\leq 1$

$$|\alpha(N,H)| \leq 2.\,H\sum_{k=1}^{H}\Big|\sum_{n=1}^{N} z_{n+k}\,\overline{z_n}\Big| + 2\underbrace{\Bigg(\sum_{k=1}^{H-1}\Bigg(\sum_{n=2}^{H-k}(n-1) + (H-k)^2 + \sum_{n=N+1}^{N+H-k}(H-k+N-n+1)\Bigg)\Bigg)}$$

$$= \sum_{k=1}^{H-1}\Bigg(\frac{(H-k)(H-k-1)}{2} + (H-k)^2 + \sum_{i=1}^{H-k} i\Bigg)$$

$$= \sum_{k=1}^{H-1}(H-k)^2 + (H-k)^2$$

$$= 2\sum_{i=1}^{H-1} i^2 = \frac{H(H-1)(2H-1)}{3} \leq \frac{2}{3}H^3$$

Finalement

$$|\alpha(N,H)| \leq 2H \sum_{k=1}^{N} \left| \sum_{n=1}^{N} z_{n+k} \overline{z_n} \right| + \frac{4}{3} H^3$$

(Voir la note page 15)

c'est un peu moins bon que ce qui est demandé, mais cela permet quand même de conclure (en fait n'importe quelle fonction de H fait l'affaire. On notera $\beta(H)$ soit le $H^2(H+1)$ de l'énoncé, soit le $\frac{4}{3}H^3$ obtenu ici).

IV.1.d) En reportant dans l'inégalité obtenue en IV.1.b) et en utilisant $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ si $a, b, c \geq 0$

on obtient

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n \right| \leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{H} \sum_{k=1}^{H} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_{n+k} \overline{z_n} \right| \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{\beta(H)}{N} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{H+1}{N}$$

IV.2) On suppose $(x_{n+h} - x_n)_{n \geq 1}$ équirépartie, on a donc pour tout h et pour tout k. $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(x_{n+h} - x_n) = 0$

Posons $z_n = e_k(x_n)$, alors $e_k(x_{n+h} - x_n) = z_{n+h} \overline{z_n}$

On a donc $\forall h \geq 1 \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_{n+h} \overline{z_n} = 0$

donc $\forall H \quad \lim_{N \to +\infty} \sqrt{2} \left(\quad \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta(H)}{N} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{H+1}{N} = 0.$

Un découpage de $\varepsilon/2$ comme on l'a déjà fait plusieurs fois donne $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n = 0$. (Choisir H pour que $\frac{1}{H^{1/2}} < \varepsilon/2$ puis N_0 tel que $\forall N \geq N_0$ $|\text{reste}(H,N)| < \frac{\varepsilon}{2}$)

Ceci est valable pour tout k, donc $(x_n)_{n \geq 0}$ est équirépartie.

IV.3) Pour $d=1$ le résultat est vrai d'après III.5 car α_1 est irrationnel.

On suppose le résultat vrai à l'ordre $d-1$ avec $d \geq 2$

Soit $k \geq 1$ dans $\mathbb{N}$

$$x_{n+k} - x_n = P(n+k) - P(n) = \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k n^k = Q_k(n)$$

(Avec $\beta_{d-k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{d-k+i}{i} k^i \alpha_{d-k+i}$) et $\beta_{d-1} = d\alpha_d \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

D'après l'hypothèse de récurrence. $(Q_k(n))_{n\geq 1}$ est équi-répartie pour tout $k \geq 1$.

D'après la question précédente $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie.

Note. En rédigeant différemment cette question.

IV.1.c) pour répondre à un élève j'ai pu obtenir exactement la majoration demandée, mais je n'ai pas voulu revenir sur cette correction.

(le principe restant exactement le même, mais l'indexation était mieux gérée).

V. Approximation rationnelle et équirépartition quantitative.

V.1) Si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ $q \in \mathbb{N}^*$ est rationnel et est aussi un nombre de Liouville, alors il existe une suite $((p_n, q_n))_{n \geq 1}$ avec $\forall n$ $p_n \in \mathbb{Z}$ $q_n \in \mathbb{N}$ $q_n \geq 2$ et $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{n-1}} \frac{1}{q_n}$.

Or $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|pq_n - q_n p|}{q q_n}$ et $|p q_n - q_n p| \in \mathbb{N} - \{0\}$ donc

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{q q_n}.$$

Or $q_n \geq 2$ donc il existe n tel que $q_n^{n-1} > q$.

On obtient une contradiction.

V.2.a) Supposons $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq 1$. (en choisissant $C_\alpha \geq 1$ on se ramène à ce cas.

$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \neq 0$ sinon $(X - \frac{p}{q})$ divise P et P n'est pas irréductible (car $\deg P \geq 2$).

$$\left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \sup_{|x| \leq 1} |P'(x)|$$

Or $P(\alpha) = 0$ donc

$$P\left(\frac{p}{q}\right) \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \sup_{|x| \leq 1} |P'(x)|.$$

Or $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ (Sinon P est divisible par $X - \frac{p}{q}$) et si D est un dénominateur commun aux coefficients de P

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{N}{D q^d}$$ où $N \in \mathbb{Z}$ et $N \neq 0$, donc $|N| \geq 1$.

Par conséquent

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{D \sup_{|x| \leq 1} |P'(x)|} \frac{1}{q^d} = \frac{C_\alpha}{q^d}.$$

V.2.b) La démonstration est exactement la même qu'en V.1.

$$\frac{c_\alpha}{q_n^d} \leq \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^{n-d}\, q_n^d} \quad \text{pour } n \geq d$$

conduit à une contradiction pour n assez grand.

V.2.c. Posons $\dfrac{p_n}{q_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{p_n}{10^{n!}}$

$$0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!-(n+1)!}}$$

pour $k \geq n+1$ $\quad k! - (n+1)! \geq k-(n+1)$ donc

$$0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=(n+1)}^{+\infty} \frac{1}{10^{k-(n+1)}} = \frac{1}{10^{n(n!)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{10^{n!}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}}}_{\leq 1 \text{ pour } n \geq 1}$$

$$0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^n.$$

α est un nombre de Liouville, ce n'est donc pas un nombre algébrique.

<u>Culture</u> : un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant. α est le premier nombre dont on ait prouvé qu'il était transcendant (Liouville 1844). e et π sont transcendants (Hermite-Lindemann et Weierstrass-Lindemann).

V.3) α est un irrationnel qui n'est pas un nombre de Liouville, donc il existe un d tel que : $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}-\{0,1\}$ $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q^d}$ (car on ne peut avoir $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq 0$).

Soit k dans $\mathbb{Z}^*$ $|e^{i2k\pi\alpha} - 1| \geq |\sin 2k\pi\alpha|$.

$$|e^{2i2k\pi\alpha} - 1| \geq |\sin (2k\alpha - p)\pi|$$

or on peut choisir p pour que $|2k\alpha - p| \leq \frac{1}{2}$ et sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi} x$ (par convexité), donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}^* \quad |e^{2ik\pi\alpha} - 1| \geq \frac{2}{\pi} |2k\alpha - p|\pi \geq \frac{2}{(2k)^{d-1}}$$

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$

$$\left|\sum_{r=1}^{N} e_k(r\alpha + x)\right| = \left| e^{2i\pi k x} \frac{1 - e^{2i\pi N k\alpha}}{1 - e^{2i\pi k\alpha}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{2i\pi k\alpha}|} \leq (2k)^{d-1}$$

Or f peut s'écrire $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e_k$ la convergence étant absolue de $(\mathcal{C}_{per}, \| \|_\infty)$ car f est au moins de classe $\mathcal{C}^2$. De plus $c_0(f) = \int_0^1 f(y)dy$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\int_0^1 f(y)dy - \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{+\infty} F_r(x)\right| = \frac{1}{N}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_k(f) \sum_{r=1}^{N} e_k(r\alpha + x)\right|$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\int_0^1 f(y)dy - \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{+\infty} F_r(x)\right| \leq \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k(f)| (2k)^{d-1}}_{C_{\alpha,f}}$$

$C_{\alpha,f}$ est bien définie puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, par conséquent $c_k(f) = O\left(\frac{1}{|k|^{d+1}}\right)$ et la famille $\left(c_k(f)(2k)^{d-1}\right)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ est donc sommable. (Règle de Riemann).

En passant à la borne supérieure on obtient bien

$$\left\| \int_0^1 f(y)dy - \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} F_r \right\|_\infty \leq \frac{C_{\alpha,f}}{N}$$