Devoir Maison 8 (Centrale sans la dernière partie)

Le but de ce problème est d'établir une identité relative à la fonction Gamma, due à Euler.

1 La fonction Γ.

On définit la fonction Γ d'Euler, pour tout réel $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$$

I.A. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.
I.B. Justifier que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
I.C. Exprimer $\Gamma(x + 1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.
I.D. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2 Formule de Stirling.

Pour tout entier $k \geq 2$, on pose :

$$u_k = \ln(k) - \int_{k-1}^{k} \ln(t) \, dt$$

II.A. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$u_k = \ln(k) - \int_{k-1}^{k} \ln(t) \, dt = \frac{1}{2}(\ln(k) - \ln(k-1)) - \int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} \, dt$$

II.B. Pour tout entier $k \geq 2$, on note :

$$w_k = \frac{1}{2} \int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} \, dt$$

Justifier la convergence de la série $\sum (w_k)_{k \geq 2}$.
En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que :

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + a + v_n \quad \text{où} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$$

II.C. En utilisant encore une intégration par parties, montrer que

$$\left| w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \right| \leq \frac{1}{6} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$$

II.D. En déduire que

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leq \frac{1}{12n^2}$$

puis que

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dans la suite, on admettra que $a = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$ et on pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3 L'identité d'Euler.

Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'Euler suivante :

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \tag{III.1}$$

On désigne par $(f_n)_{n\geq 1}$la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si} \quad t \in]0, n[\\ 0 & \text{si} \quad t \geq n \end{cases}$$

et on définit pour tout réel $x > 0$ les suites $(I_n(x))_{n\geq 1}$ et $(J_n(x))_{n\geq 0}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$$

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\, dt$$

III.A. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.B. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$$

III.C. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

III.D. En déduire que pour tout $x > 0$,

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}$$

III.E. Etablir l'identité d'Euler $(III.1)$.

4 Une intégrale à paramètres.

Dans toute la suite, on définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par

$$h(u) = u - [u] - 1/2$$

où la notation $[u]$ désigne la partie entière de u.

IV.A. Dessiner soigneusement le graphe de l'application h sur l'intervalle $[-1, 1]$.

IV.B. Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x h(t)\, dt$$

est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et périodique de période 1.

IV.C. A l'aide d'une intégration par parties, justifier pour $x > 0$ la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

IV.D. L'application $u \mapsto \frac{h(u)}{u+x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

IV.E. Soit φ l'application définie pour tout $x > 0$ par

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

En reprenant l'intégration par parties de la question **IV.C**, démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $x > 0$

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2}\, du$$

5 Une autre identité due à Euler.

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout $x > 0$:

$$\ln(\Gamma(x+1)) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\, du$$

où h est l'application définie à la partie IV.

On fixe donc $x > 0$ et pour tout entie naturel n, on définit $F_n(x)$ par

$$F_n(x) = \ln\left(\frac{n!n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\right)$$

V.A. Montrer que pour tout entier naturel i :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t)\, dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\, du$$

V.B. En déduire que

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

où

$$G_n(x) = \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x)$$

V.C.

C.1 En utilisant la formule de Stirling, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi})$$

C.2 En déduire que

$$\ln(\Gamma(x+1)) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\, du$$

V.D. Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln(x) + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\, du$$