Corrigé Centrale PSI Maths I 2011 par Christophe Hénocq

I.A Soit $x \in \mathbf{R}$. La fonction $h : t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et positive. En 0, $h(t) \sim t^{x-1}$. Il y a donc intégrabilité si et seulement si $x > 0$. En $+\infty$, $h(t) = o(\frac{1}{t^2})$. Donc h est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

I.B Introduisons la fonction de deux variables $f : (x, t) \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$, définie sur $]0, +\infty[^2$.
• Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $f(x, .)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et intégrable d'après I.A.
• Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $f(., t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln(t)e^{-t}t^{x-1}$.
• Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
• Pout tout segment $[a, A] \subset]0, +\infty[$ on a

$$\forall (x, t) \in [a, A] \times]0, +\infty[, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \varphi(t) = \begin{cases} \ln(t)e^{-t}t^{A-1} \text{ si } t > 1 \\ |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} \text{ si } t \leq 1 \end{cases}$$

Montrons que la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En 0 on a $\varphi(t) = |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} = o(t^{\frac{a}{2}-1})$, et $t \longmapsto t^{\frac{a}{2}-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$. En $+\infty$, $\varphi(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
On peut en conclure, d'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$ que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les segments de $]0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, la fonction $h : t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et strictement positive. Donc $\Gamma(x) > 0$.

I.C En intégrant par parties on a $\Gamma(x + 1) = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x\Gamma(x) = x\Gamma(x)$.

I.D On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$. On en déduit, par récurrence, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

II.A En procédant à deux intégrations par parties on a

$$\begin{aligned}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}dt &= \left[\frac{-(t-k+1)(k-t)}{t}\right]_{k-1}^{k} + \int_{k-1}^{k} \frac{-2t+2k-1}{t}dt \\ &= [(-2t+2k-1)\ln(t)]_{k-1}^{k} + 2\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \\ &- \ln(k) - \ln(k-1) + 2\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt\end{aligned}$$

On en déduit la formule demandée.

II.B On pose, pour $t \in [k - 1, k]$, $h(t) = (t - k + 1)(k - t)$. Un étude rapide montre que $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{4}$. On en déduit $0 \leq w_k \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{8k(k-1)}$ qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit que $S = \displaystyle\sum_{k \geq 2} w_k$ est une série convergente. On a alors

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} u_k + \int_1^n \ln(t)dt = \frac{1}{2}\ln(n) - \sum_{k=2}^{n} w_k + n\ln(n) - n + 1 = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + 1 - S + v_n.$$

La constante $a = 1 - S$ convient.

II.C On a $w_k - \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_{k-1}^{k}\dfrac{dt}{t^2} = \dfrac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\dfrac{-6t^2+6(2k-1)t-(6k^2-6k+1)}{t^2}dt$. On intègre par parties en choisissant la constante C de sorte que le crochet soit nul :

$$w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{12}\left[\frac{-2t^3+3(2k-1)t^2-(6k^2-6k+1)t+C}{t^2}\right]_{k-1}^{k} + \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k}\frac{-2t^3+3(2k-1)t^2-(6k^2-6k+1)t+C}{t^3}$$

Un calcul rapide montre que la valeur convenable de C est $C = k(k-1)(2k-1)$. On arrive ainsi à l'égalité $\left|w_k - \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_{k-1}^{k}\dfrac{dt}{t^2}\right| = \dfrac{1}{6}\left|\int_{k-1}^{k}\dfrac{(t-k+1)(k-t)(2t-2k+1)}{t^3}dt\right| \leq \dfrac{1}{6}\int_{k-1}^{k}\left|\dfrac{(t-k+1)(k-t)(2t-2k+1)}{t^3}\right|dt$

Donc $\left|w_k - \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_{k-1}^{k}\dfrac{dt}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{6}\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{t^3}dt$.

II.D On a $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_{n}^{+\infty}\dfrac{dt}{t^2} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\dfrac{dt}{t^2}$. On peut donc écrire :

$$\left|v_n - \frac{1}{12n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2}\right| \leq \frac{1}{6}\int_{n}^{+\infty}\frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{12n^2}.$$

Donc $v_n = \dfrac{1}{12n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\ln(n!) = n\ln(n) - n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + a + \dfrac{1}{12n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

III.A La fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$ puisqu'en n ses limites à gauche et à droite sont 0. En 0, $f_n(t) \sim t^{x-1}$. Donc f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

III.B On applique le théorème de convergence dominée. Pour t fixé dans $]0,+\infty[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}t^{x-1}$. Mais aussi, en utilisant l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$, $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$. Donc $f_n(t) = e^{-t}t^{x-1}$. On sait que $t \longrightarrow e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$.

III.C On intègre par parties : $J_{n+1}(x) = \left[\dfrac{t^x}{x}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 + \dfrac{n+1}{x}J_n(x+1) = \dfrac{n+1}{x}J_n(x+1)$

III.D On en déduit : $J_n(x) = \dfrac{n}{x}\dfrac{n-1}{x+1}...\dfrac{1}{x+n-1}J_0(x+n) = \dfrac{n!}{x(x+1)...(x+n-1)(x+n)}$.

III.E On constate, en posant $u = \dfrac{t}{n}$ que $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n n^x u^{x-1}du = n^x J_n(x)$. On en déduit l'identité d'Euler, en utilisant III.B et III.D.

IV.A

IV.B La fonction h est 1-périodique, continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et vérifie $\displaystyle\int_0^1 h(t)dt = 0$. On a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+1} h(t)dt = 0$, c'est-à-dire $H(x+1) - H(x) = 0$. Ainsi H est 1-périodique. Pour $x \in [0,1[$, $H(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$. On en déduit que H est continue sur $\mathbf{R}$ (si $n \in \mathbf{Z}$, $H(n=0)$) et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

IV.C Pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $H'(t) = h(t)$. D'après les propriétés données à la question IV.B, Si $X \in]0, +\infty[$, on a $\displaystyle\int_0^X \frac{h(u)}{u+x} du = \left[\frac{H(u)}{u+x}\right]_0^X + \int_0^X \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$. On sait que H est bornée : $-\frac{1}{8} \leq H(x) \leq 0$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$ est absolument convergente et que le crochet a une limite nulle lorsque $X \to +\infty$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$ converge et on a l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du = \int_0^\infty \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$$

IV.D Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{h(u)}{u+x}\right| du$ soit convergente, alors $x_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \left|\frac{h(u)}{u+x}\right| du$ serait le terme général d'une série convergente. Montrons qu'il n'en est rien.

$$x_n = \int_n^{n+1/2} \frac{n+1/2-u}{u+x} du + \int_{n+1/2}^{n+1} \frac{u-n-1/2}{u+x} du = (n+x+1/2) \ln\left(\frac{(x+n+1/2)^2}{(x+n)(x+n+1)}\right)$$

Donc $x_n = (x+n+1/2) 2\ln(n+x+1/2) - \ln(n+x) - \ln(n+x+1)$ On trouve

$$x_n = (x+n+1/2)\left(\frac{2x+1}{n} - \frac{(x+1/2)^2}{n^2} - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} - \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit que $u \longmapsto \dfrac{h(u)}{u+x}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

IV.E On reprend l'égalité $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$ pour appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$. On définit une fonction $f : (x, u) \longmapsto \frac{H(u)}{(u+x)^2}$ sur $]0, +\infty[\times[0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $f(x, .)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable.
- Pour tout $u \in]0, +\infty[$, la fonction $f(., u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \dfrac{-2H(u)}{(u+x)^3}$.
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pout tout intervalle $[a, +\infty[\subset]0, +\infty[$ on a $\forall (x, u) \in [a, +\infty] \times [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)\right| \leq \dfrac{1}{4(a+u)^3}$.

La fonction $u \longmapsto \frac{1}{4(a+u)^3}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[a, +\infty[\subset]0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$. On a, en intégrant par parties :

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2H(u)}{(u+x)^3} du = \left[\frac{H(u)}{(u+x)^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du$$

V.A On calcule les deux membres : $\displaystyle\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t) dt = (x+i+1)\ln(x+i+1) - (x+i)\ln(x+i) - 1$. Par ailleurs $\ln(x+i) - \displaystyle\int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} du = \ln(x+i) - 1 + (x+i+1) \ln\left(\frac{x+i+1}{x+i}\right)$. D'où l'égalité demandée.

V.B

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - \sum_{i=0}^n \ln(x+i) + \ln(x) - \ln(x+n+1) \\
&= \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - \int_x^{x+n+1} \ln(t) dt - \int_0^{n+1} \frac{h(u)-1/2}{u+x} du + \ln(x) - \ln(x+n+1) \\
&= G_n(x) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du
\end{aligned}$$

en posant $G_n(x) = \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - (x+n+1)\ln(x+n+1) + x\ln(x) + n + 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+n+1}{x}\right) +$ $\ln(x) - \ln(x+n+1) = \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - (x+n+3/2)\ln(x+n+1) + n + 1 + (x+1/2)\ln(x)$.

V.C.1) On utilise la formule de Stirling :
$G_n(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+x+1}\right) + 1 + o(1)$.
On trouve $\left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+x+1}\right) = -(x+1) + o(1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) - x$

V.C.2) D'après l'identité d'Euler, $\ln(\Gamma(x+1)) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) - x - \varphi(x)$.

V.D On dérive l'égalité précédente. Cela donne, en utilisant les parties I et IV :

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln(x) + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}du$$