Deuxième partie : le système de Schauder.

5a) $[k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}] = [(2k')2^{-j-1}, (2k'+1)2^{-j-1}] \cup [(2k'+1)2^{-j-1}, (2k'+1+1))2^{-j-1}]$

Or pour tout k, $0 \leq k < 2^{j+1}$, il existe un unique k', $0 \leq k' < 2^j$ tel que $k = 2k'$ ou $k = 2k'+1$. Ceci prouve l'existence de k'

Réciproquement si $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$ alors

$k\,2^{-j-1} \geqslant k'2^{-j}$ et $(k+1)\,2^{-j-1} \leq (k'+1)2^{-j}$

$k \geqslant 2k'$ et $k+1 \leq 2k'+2$. soit $2k' \leq k \leq 2k'+1$

Or k s'écrit de manière unique $2k'$ ou $2k'+1$ selon qu'il soit pair ou impair. Cela prouve l'unicité de k'.

$k' = \left[\frac{k}{2}\right]$

5b) Remarquons que $\theta_{j,k}(k2^{-j}) = \theta_{j,k}((k+1)2^{-j}) = 0$.

Pour $l \leqslant 2k$ $\quad l\,2^{-j-1} \leqslant k\,2^{-j}$ $\quad$ donc $\theta_{j,k}(l\,2^{-j-1}) = 0$

pour $l \geqslant 2k+2$ $\quad l\,2^{-j-1} \geqslant (k+1)\,2^{-j}$ $\quad$ donc $\theta_{j,k}(l\,2^{-j-1}) = 0$

$l = 2k+1$ $\quad \theta_{j,k}(l\,2^{-j-1}) = 1$.

En conclusion $\theta_{j,k}(l\,2^{-j-1}) = \delta_{l,2k+1}$ $\quad$ δ : symbole de Kronecker.

5c) $$\theta_{j,k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, k2^{-j}] \\ -2k + 2^{j+1}x & \text{si } x \in [k2^{-j}, (2k+1)2^{-j-1}] \\ 2^{j+1}x - (2k+2) & \text{si } x \in [(2k+1)2^{-j-1}, (k+1)2^{-j}] \\ 0 & \text{si } x \in [(k+1)2^{-j}, 1]. \end{cases}$$

Il résulte de cette écriture que $\theta_{j,k}$ est continue, affine sur chaque intervalle $[l2^{-n}, (l+1)2^{-n}]$ si $n > j$ car un tel intervalle est contenu dans un des quatre intervalles sur lesquels $\theta_{j,k}$ est affine. Il est clair que $\theta_{j,k}$ est dans $\mathcal{E}^0$

5d) la restriction de $\theta_{j,k}$ à chacun des quatre intervalles précédent est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $|\theta'_{j,k}(x)| \leq 2^{j+1}$ (en toute rigueur on devrait écrire $|(\theta_{j,k|J})'(x)| \leq 2^{j+1}$, si $x \in J$). (5)

Soit $(x,y) \in [0,1]^2$, avec par exemple $x \leq y$. On intercale entre x et y, le cas échéant un ou deux points de $\{k2^{-j}, (k+1)2^{-j-1}, (k+1)2^{-j}\}$ voire trois.

$\underline{x \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq y}$ (quitte à rajouter x ou y on peut supposer qu'il y a exactement trois points)

$$|\theta_{j,k}(y) - \theta_{j,k}(x)| \leq |\theta_{j,k}(y) - \theta_{j,k}(x_3)| + |\theta_{j,k}(x_3) - \theta_{j,k}(x_2)| + |\theta_{j,k}(x_2) - \theta_{j,k}(x_1)| + |\theta_{j,k}(x_1) - \theta_{j,k}(x)|$$

On applique l'inégalité des accroissements finis à des fonctions affines.

$$|\theta_{j,k}(y) - \theta_{j,k}(x)| \leq 2^{j+1}(|y-x_3| + |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| + |x_1 - x|)$$
$$\leq 2^{j+1}(y - x_3 + x_3 - x_2 + x_2 - x_1 + x_1 - x) = 2^{j+1}(y-x) = |y-x| 2^{j+1}$$

$$\underline{|\theta_{j,k}(y) - \theta_{j,k}(x)| \leq 2^{j+1}|y-x|.}$$

6) $c_{j,k}(f) = \frac{1}{2}\left(\left(f((k+\tfrac{1}{2})2^{-j}) - f(k2^{-j})\right) + \left(f((k+\tfrac{1}{2})2^{-j}) - f((k+1)2^{-j})\right)\right)$

$$|c_{j,k}(f)| \leq \frac{1}{2}\left(|f((k+\tfrac{1}{2})2^{-j}) - f(k2^{-j})| + |f((k+\tfrac{1}{2})2^{-j}) - f((k+1)2^{-j})|\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\omega_f\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right) + \omega_f\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\right)$$

$$\underline{|c_{j,k}(f)| \leq \omega_f\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right).}$$

Il résulte de la première partie que $\underline{\lim_{j \to +\infty} |c_{j,k}(f)| = 0}$

7a) $\underline{\text{Si } j < i}$ alors $\forall k \in \mathcal{J}_j$

$(k+\frac{1}{2})2^{-j} = k' 2^{-i}$ $k' \in \mathcal{J}_i$

$k 2^{-j} = (k' - 2^{i-j-1})2^{-i}$

$(k+1)2^{-j} = (k' - 2^{i-j-1} + 1)2^{-i}$

Donc $\underline{c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0}$

- Pour $j \geq i+1$ $\theta_{i,\ell}$ est affine sur $[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$ et $(k+\frac{1}{2})2^{-j} = \frac{1}{2}(k2^{-j}+(k+1)2^{-j})$

donc $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$

- Reste le cas $j = i$.

On obtient aisément $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = \delta_{k,\ell}$ car tous les $\theta_{i,\ell}(k2^{-i})$ sont nuls et le seul cas où $\theta_{i,\ell}((2k+1)2^{-i-1})$ est non nul, c'est lorsque $k=\ell$.

En conclusion. $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = \delta_{(j,k),(i,\ell)} = \delta_{i,j}\,\delta_{k,\ell}$.

7b) Soit $x \in [0,1[$ $\forall j > 0$ $\exists! k \in J_j$ $x \in [k2^{-j}, k+1\,2^{-j}[$.

Pour $\ell \geq (k+1)$ $\theta_{j,\ell}(x) = 0$ pour $\ell < k$ $\theta_{j,\ell}(x) = 0$, donc

$$\sum_{\ell=0}^{2^j-1} \theta_{j,\ell}(x) = \theta_{j,k}(x) \in [0,1]$$

On en déduit

$\forall x \in [0,1]$ $|f_j^a(x)| \leq \sum_{k \in J_j} |a_{j,k}|\,\theta_{j,k}(x)$ (car $\theta_{j,k}(x) \geq 0$)

$\forall x \in [0,1]$ $|f_j^{(a)}(x)| \leq b_j \sum_{k \in J_j} \theta_{j,k}(x) \leq b_j$

Or $\sum_{j \geq 1} b_j$ est convergente donc

$\sum_{j \geq 1} f_j^a$ est normalement, donc uniformément convergente sur $[0,1]$.

Sa somme f^a est donc continue sur $[0,1]$, dans $\mathcal{C}^0$

car $\forall j,k$ $\theta_{j,k}(0) = \theta_{j,k}(1) = 0$ donc $\forall j$ $f_j^a(0) = f_j^a(1) = 0$

De plus $\forall i,l \in \mathcal{J}$, puisque $c_{i,l}(f^a)$ est une somme de trois termes on peut permuter les sommations et on aura.

$$c_{i,l}(f^a) = \sum_j c_{i,l}(f_j^a) = \sum_j \sum_{k \in \mathcal{J}_j} a_{j,k}\, c_{i,l}(\theta_{j,k})$$

$$= \sum_j \sum_{k \in \mathcal{J}_j} a_{j,k}\, \delta_{(i,l),(j,k)}$$

$\forall (i,l) \in \mathcal{J} \quad c_{i,l}(f^a) = a_{i,l}$

8a)* On a vu en 6) que $|c_{j,k}(f)| \leq \omega_f\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)$

Or, d'après l'inégalité des accroissements finis, si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc à dérivée bornée, on a :

$\forall (x,y) \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_\infty |x-y|$ donc

$\forall h \in [0,1] \quad \omega_f(h) \leq \|f'\|_\infty h.$

On peut donc prendre $M = 2\|f'\|_\infty$ pour obtenir

$\forall (j,k) \in \mathcal{J} \quad |c_{j,k}(f)| \leq M 2^{-j}$

* Si on choisit $a_{j,k} = c_{j,k}(f)$ on a $0 \leq b_j \leq M 2^{-j}$

Donc $\sum_{j \geq 0} b_j$ est convergente, on peut appliquer le résultat de 7b) et $(S_n f)_{n \geq 0}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$

8b) $c_{j,k}(f) = f(x) - \dfrac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$ avec.

$x = (k + \frac{1}{2}) 2^{-j}$. $h = 2^{-j-1}$.

La majoration de Taylor-Lagrange donc. On en déduit

$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + R_+$ avec $|R| \leq \frac{h^2}{2} \|f''\|_\infty$

$c_{j,k}(f) = -\dfrac{R_+ + R_-}{2} \qquad |c_{j,k}(f)| \leq \|f''\|_\infty \dfrac{h^2}{2} \leq \dfrac{\|f''\|_\infty}{8} \dfrac{1}{4^j} = M' 4^{-j}$

9a) Cela résulte immédiatement de la question 5c)

Pour tout j, $0 \leq j \leq n$, on a $j < n+1$. donc pour tout k, $0 \leq k < j \leq n$ $\theta_{j,k}$ est affine sur $[\ell 2^{-(n+1)}, (\ell+1)2^{-n-1}]$.

Il suffit ensuite de remarquer que toute combinaison linéaire de fonctions affines est affine.

9b) Remarquons que pour $n \geqslant 1$

$$S_n f = S_{n-1} f + \sum_{k \in J_n} c_{n,k}(f)\, \theta_{n,k}.$$

$$(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = (S_{n-1} f)(\ell 2^{-n-1}) + \sum_{k \in J_n} c_{n,k}(f)\, \theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1})$$

Premier cas $\ell = 2\ell'$ $\ell' \in \mathbb{N}$.

$$(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = (S_{n-1} f)(\ell' 2^{-n}) + \sum_{k \in J_n} c_{n,k}(f)\, \theta_{n,k}(\ell' 2^{-n})$$

$$= f(\ell' 2^{-n}) + \sum_{k \in J_n} c_{n,k}(f) \times 0$$

$$\underline{(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})}$$

Deuxième cas $\ell = 2\ell' + 1$ $\ell' \in \mathbb{N}$. Le même départ donne

$$(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = (S_{n-1} f)(\ell 2^{-n-1}) + c_{n,\ell'}(f)$$

or $\ell 2^{-n-1} = \frac{1}{2}(\ell' 2^{-n} + (\ell'+1)2^{-n})$ et $S_{n-1}(f)$ est affine sur $[\ell' 2^{-n}, (\ell'+1)2^{-n}]$

donc $$(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = \frac{1}{2}\left((S_{n-1} f)(\ell' 2^{-n}) + (S_{n-1}(f))((\ell'+1)2^{-n})\right) + c_{n,\ell'}(f)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(\ell' 2^{-n}) + f((\ell'+1)2^{-n})\right) + f\left((\ell' + \tfrac{1}{2})2^{-n}\right) - \frac{f(\ell' 2^{-n}) + f((\ell'+1)2^{-n})}{2}.$$

$$\underline{(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})}$$

$$\forall \ell \in J_{n+1} \quad (S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1}) \quad \&$$

d'où que $\forall k \in J_n \quad (S_{n-1} f)(k 2^{-n}) = f(k 2^{-n})$.

9c) $S_0 f = c_{0,0}(f)\ \theta_{0,0}$

$S_0 f\ (0 \times 2^{-1}) = c_{0,0}(f) \times 0 = 0 = f(0)$

$S_0 f\ (1 \times 2^{-1}) = c_{0,0}(f) \times 1 = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(\underbrace{f(0)+f(1)}_{=0}) = f(\frac{1}{2})$

L'hypothèse $\mathcal{H}_n$: $\forall \ell \in J_{n+1}\quad S_n(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$

est vrai pour $n=0$ et $\mathcal{H}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{H}_n$.

Donc le principe de récurrence permet d'affirmer

$\forall n \in \mathbb{N}\quad \forall \ell \in J_{n+1}\quad (S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$

10a) On déduit de 9c que $\forall k \geq n\quad (S_k f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$ (*)

(car $\ell 2^{-n-1} = \ell \times 2^{k-n}\ 2^{-k-1} = \ell' 2^{-k-1}\quad \ell' \in J_{k+1}$.

Or $(S_n f)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction g, donc d'une part elle converge simplement vers cette fonction g et cette fonction g est continue.

Or le passage à la limite dans (*) donne $\forall n\ \forall k \in J_{n+1}\quad g(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$

Donc $\forall (\ell, n) \in J\quad g(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$

Or $\{\ell 2^{-n-1}, \ell, n \in J\}$ est dense dans $[0,1]$, donc, puisque f et g sont continue et $g = f$.

On a $\lim_{n \to +\infty} \| f - S_n f \|_\infty = 0$.

10b)* On a vu $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = \delta_{j,i}\ \delta_{k,\ell}$, donc.

$c_{i,\ell}(S_n) = c_{i,\ell}(f)$ pour $0 \leq i \leq n\quad \ell \in J_n$.

Par conséquent $S_n(S_n f) = S_n f$.

$S_n \circ S_n = S_n$

S_n est un projecteur. (la linéarité de S_n est évidente)

* D'autre part $S_n f$ est affine sur $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1) 2^{-n-1}]$
Or $\forall x \in [\ell 2^{-n-1}, (\ell+1) 2^{-n-1}]$ il existe λ dans $[0,1]$ tel que $x = \lambda \ell 2^{-n-1} + (1-\lambda)(\ell+1)2^{-n-1}$ donc

$$(S_n f)(x) = \lambda (S_n f)(\ell 2^{-n-1}) + (1-\lambda)((\ell+1) 2^{-n-1})$$

$$= \lambda \quad f(\ell 2^{-n-1}) + (1-\lambda) \quad f((\ell+1)2^{-n-1})$$

$$|S_n f(x)| \leq \lambda \quad |f(\ell 2^{-n-1})| + (1-\lambda) |f((\ell+1)2^{-n-1})|$$

$$\leq (\lambda + (1-\lambda)) \sup_{t \in [\ell 2^{-n-1}, (\ell+1) 2^{-n-1}]} |f(t)| \leq \|f\|_\infty$$

Donc puisque $[0,1] = \bigcup_{\ell \in ⟧_{n+1}} [\ell 2^{-n-1}, (\ell+1) 2^{-n-1}]$ on aura

$$\|S_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

Donc S_n est continue et $\sup_{f \neq 0} \frac{\|S_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq 1$

Si on choisit $f = \theta_{0,0}$ alors $\|f\| = 1$ et $\forall n$ $S_n f = f$ donc

$\forall n$ $\sup \frac{\|S_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty} \geq 1$.

Finalement $$|||S_n||| = \sup_{f \in \mathcal{C}^0 - \{0\}} \frac{\|S_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty} = 1.$$

11a) $s \in]0,1[$. Considérons $f : x \mapsto x^s$ f est continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ $\forall x \in]0,1[$ $f''(x) = s(s-1)x^{s-2} < 0$, donc f est concave sur $[0,1]$

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2 \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$\frac{(a+b)^s}{2^s} \geq \frac{a^s + b^s}{2}$$

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2 \quad 2^{1-s}(a+b)^s \geq a^s + b^s.$$

11.b) $C_{j,k}(f) = f\left((k+\frac{1}{2})2^{-j}\right) - \dfrac{f(k2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})}{2}$ (11)

$$= f\left((k+\tfrac{1}{2})2^{-j}\right) - f(x_0) - \frac{f(k2^{-j}) - f(x_0) + f((k+1)2^{-j}) - f(x_0)}{2}$$

$$|C_{j,k}(f)| \leq \left|f\left((k+\tfrac{1}{2})2^{-j}\right) - f(x_0)\right| + \frac{1}{2}\left(|f(k2^{-j}) - f(x_0)| + |f((k+1)2^{-j}) - f(x_0)|\right)$$

$$\underline{|C_{j,k}(f)| \leq M\left(|k2^{-j} - x_0 + 2^{-j-1}|^{s} + \frac{1}{2}\left(|k2^{-j} - x_0|^{s} + |(k+1)2^{-j} - x_0|^{s}\right)\right)}$$

car $M \in \Gamma^{s}(x_0)$

$$|C_{j,k}(f)| \leq M\left(\left|(k+\tfrac{1}{2})2^{-j} - x_0\right| + 2^{-s}\left(|k2^{-j} - x_0| + |(k+1)2^{-j} - x_0|\right)\right)^{s}$$

$$\leq M\,2^{1-s}\left(\left|(k+\tfrac{1}{2})2^{-j} - x_0\right| + \frac{1}{2}\left(|k2^{-j} - x_0| + |(k+1)2^{-j} - x_0|\right)\right)^{s}$$

$$\leq M\,2^{1-s}\left(|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j-1} + |k2^{-j} - x_0| + \frac{1}{2}|2^{-j}|\right)^{s}$$

$$\leq M\,2^{1-s}\left(2|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j}\right)^{s}$$

$$\underline{|C_{j,k}(f)| \leq M\,2^{2-s}\left(|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j}\right)^{s}}$$

(On peut ~~peut~~ peut-être obtenir un meilleur coefficient que le 2^{2-s}).