Polytechnique 2013 Option MP Mathématiques B

Exposant de Hölder d'une fonction continue.

Première partie : définition de l'exposant de Hölder ponctuel.

1a) + Notons $M_{f,s,x_0} = \sup\limits_{x \in [0,1]-\{x_0\}} \dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s}$ si f est dans $\Gamma^s(x_0)$.

On a $0 \in \Gamma^s(x_0)$ (avec $M_{0,s,x_0} = 0$)

et si $(f,g) \in (\Gamma^{(s)}(x_0))^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in [0,1]-\{x_0\} \quad \frac{|(f+\lambda g)(x) - (f+\lambda g)(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq M_{f,s,x_0} + |\lambda| M_{g,s,x_0}$$

Donc $f + \lambda g \in \Gamma^s(x_0)$.

$\Gamma^s(x_0)$ est donc bien un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

+ Si $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, alors

$$\forall x \in [0,1]-\{x_0\} \quad |x-x_0|^{s_2} \leq |x-x_0|^{s_1} \quad (\text{car } |x-x_0| \in [0,1])$$

Donc si $f \in \Gamma^{s_2}(x_0)$ $\forall x \in [0,1]-\{x_0\}$ $\dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_1}} \leq M_{f,s_2,x_0}$

et $f \in \Gamma^{s_1}(x_0)$ (avec $M_{f,s_1,x_0} \leq M_{f,s_2,x_0}$)

Donc $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$ et $s \mapsto M_{f,s,x_0}$ est croissante.

+ $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$ car toute fonction continue ~~est~~ sur le segment $[0,1]$ est bornée.

1.b) La démonstration de la question précédente était valable pour $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1$. Et si f est dérivable en x_0 alors la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est continue sur $[0,1]-\{x_0\}$ et admet une limite en x_0. Elle est donc bornée. Donc $f \in \Gamma^1(x_0)$ et d'après la question précédente $f \in \Gamma^s(x_0)$ pour tout s de $[0,1[$

1.c) Il suffit de choisir $f : x \mapsto |x-x_0|$, puisque $x_0 \in]0,1[$ f possède une dérivée à gauche en x_0 valant -1 et une dérivée à droite valant -1, donc f n'est pas dérivable en x_0.

et $\forall x \in [0,1]-\{x_0\}$ $\forall s \in [0,1[$ $\quad \dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} = |x-x_0|^{s} \leq 1$.

Donc $f \in T^s(x_0)$ pour tout s de $[0,1[$

2) $\forall x \in [0,1]-\{\frac{1}{2}\}$ $\quad \varphi(x) = \dfrac{|p(x)-p(\frac{1}{2})|}{|x-\frac{1}{2}|^s} = 2^s \dfrac{\sqrt{1+2x}}{|1-2x|^{s-\frac{1}{2}}}$

Or $\forall x \in [0,1]$ $\quad 1 \leq \sqrt{1+2x} \leq \sqrt{3}$. Donc φ est majorée ssi $s \leq \frac{1}{2}$.

$\alpha_p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

3a)

+ Si $0 \leq h' \leq h \leq 1$ alors $\{(x,y) \in [0,1]^2, |x-y| \leq h'\} \subset \{(x,y) \in [0,1]^2, |x-y| \leq h\}$

donc $\quad \omega_f(h') \subset \omega_f(h)$. $\quad$ ω_f est croissante.

+ f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est donc uniformément continue.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta \ \forall (x,y) \in [0,1]^2 \ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta \ \forall h \in [0,1] \ |h-0| < \eta \ \ \forall (x,y) \in [0,1]^2 \ |x-y| \leq h \ \ |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall h \in [0,1] \ |h| < \eta \Rightarrow \omega_f(h) \leq \varepsilon$

Ce qui veut exactement dire que ω_f est continue en 0.

3b) Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ $\quad |x-y| \leq h'$.

Si $|x-y| \leq h$ $\quad |f(x)-f(y)| \leq \omega_f(h) \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$

Si $|x-y| \geq h$ par exemple $x \leq x+h \leq y$ alors

$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x+h)| + |f(x+h)-f(y)|$

$\leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$

En passant à la borne supérieure

$\omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$.

3c) $\forall h, h'$ $0 \leq h \leq h' \leq 1$

$$\omega_f(h) \leq \omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$$

donc $$0 \leq \omega_f(h') - \omega_f(h) \leq \omega_f(h'-h)$$

$$|\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f(h'-h).$$

En permutant les rôles de h et h'

$$\forall (h,h') \in [0,1]^2 \quad |\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f(|h'-h|)$$

Or $\lim_{\eta \to 0} \omega_f(\eta) = 0$. Donc ω_f est uniformément continue.

donc continue.

4a) Si $0 \leq \frac{\omega_f(h)}{h^s} \leq M$ pour tout h de $]0,1]$, alors

$\forall x_0 \in [0,1]$ $\forall x \in [0,1] - \{x_0\}$ (puisque $|f(x) - f(x_0)| \leq \omega_f(|x-x_0|)$) $\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq M$

et $f \in \Gamma^s(x_0)$

4b) + Si $x_0 \neq 0$ g est dérivable en x_0 donc $\alpha_g(x_0) = 1$. (d'après 1.b)

Pour $x_0 = 0$ $\forall s \in [0,1[$ $\forall x \in]0,1]$ $\frac{|g(x)|}{|x|^s} \leq x^{1-s}$ et

$\lim_{x \to 0^+} x^{1-s} = 0$ donc $x \mapsto \frac{|g(x)|}{|x|^s}$ est bornée. (continue sur $]0,1]$ avec une limite en 0).

Donc $\alpha_g(0) = 1$.

+ prenons $x = \frac{1}{2k}$ $y = \frac{1}{2k+1}$, $k \geq 1$.

$$g(x) = \frac{1}{2k} \qquad g(y) = -\frac{1}{2k+1} \qquad |g(x) - g(y)| \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k}$$

$$|x - y| = \frac{1}{2k(2k+1)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{4k^2}$$

Si $h = \frac{1}{2k(2k+1)}$ $\omega_f(h) \geq |g(x) - g(y)|$ donc

$$\frac{\omega_f(h)}{\sqrt{h}} \geq \sqrt{2k(2k+1)} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} \right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 2,$$

Donc $\frac{\omega_f(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers 0 avec h.