Deuxième partie

7.a) $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire. $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension
$(t_0, \ldots, t_n) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} t_i s_i$

finie donc φ est continue et $\mathcal{S} = \varphi(K)$ $\quad K = \{(t_0, \ldots, t_n), \forall i\ t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1\}$.

Il suffit de prouver que K est compact.

Or $K \subset [0,1]^{n+1}$ donc K est borné

et $K = \left(\bigcap_{i=0}^{n} \{t, t_i \geq 0\}\right) \cap \{t, \sum t_i = 1\}$ fermé (idem)

fermé car $t \to t_i$ est linéaire donc continue

K est fermé comme intersection de fermé

$\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension finie. K est fermé et borné donc compact

- Montrons que $\mathcal{S}$ est convexe.

Soit $\sum_{i=0}^{n} t_i s_i$ et $\sum_{i=0}^{n} t'_i s_i$ dans $\mathcal{S}$

et $u \in [0,1]$, alors

$$(1-u)\left(\sum_{i=0}^{n} t_i s_i\right) + u\left(\sum_{i=0}^{n} t'_i s_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \left((1-u) t_i + u t'_i\right) s_i \in \mathcal{S}$$

car $\forall i \quad (1-u) t_i + u t'_i \geq 0$

et $\sum_{i=0}^{n} \left((1-u) t_i + u t'_i\right) = (1-u)\left(\sum_{i=0}^{n} t_i\right) + u\left(\sum_{i=0}^{n} t'_i\right) = 1-u+u = 1$.

(En fait $\mathcal{S}$ est le plus petit convexe contenant tous les s_i, c'est ce qu'on appelle l'enveloppe convexe de $\{s_i, 0 \leq i \leq n\}$.

7b) Si on utilise la deuxième caractérisation de $\mathcal{S}$.

il s'agit de prouver $\mathring{\mathcal{S}} = \{ s_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (s_i - s_0) \mid \forall i \geq 1\ t_i > 0,\ t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i > 0 \}$

soit $\mathring{\mathcal{S}} = \{ s_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (s_i - s_0),\ \forall i \geq 1\ t_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} t_i < 1 \}$.

$(s_1 - s_0, \quad , s_n - s_0)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, tout élément de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (s_i - s_0)$.

$\underline{\| s \| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|}$ est donc une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Sur $\mathbb{R}^n$ <u>toutes les normes sont équivalentes</u> car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie.

On peut donc faire le choix de cette norme.

Notons temporairement $A = \{ s_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (s_i - s_0),\ \forall i \geq 1\ t_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \}$.

+ On a $A \subset \mathcal{S}$

+ o Soit s dans A et $\underline{r = \min \{ (\min_{1 \leq i \leq n} t_i),\ 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i) > 0}$.

L'inégalité triangulaire et le choix adéquat de la norme donne immédiatement $\underline{B(s, r) \subset A}$.

Donc A est ouvert et par conséquent $\underline{A \subset \mathring{\mathcal{S}}}$.

o Soit $s \notin A$, il existe $i_0 \in [1, n]$ $t_{i_0} = 0$ (ou $\sum t_i = 1$)

alors $\forall \varepsilon > 0$ $\underline{s - \frac{\varepsilon}{2} (s_{i_0} - s_0) \in B(s, \varepsilon)}$ mais $s \notin \mathcal{S}$

donc $\mathcal{S}$ n'est pas un voisinage de s et $s \notin \mathring{\mathcal{S}}$.

(Dans le dernier cas $s + \frac{\varepsilon}{2} (s_1 - s_0)$ fait l'affaire).

Donc $s \notin A \Rightarrow s \notin \mathring{\mathcal{S}}$ soit $\underline{\mathring{\mathcal{S}} \subset A}$ et finalement

$\underline{\mathring{\mathcal{S}} = A}$.

On suppose que $0 \in \mathring{S}$ On peut donc écrire

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i s_i \quad \text{avec} \quad \alpha_i > 0 \text{ pour tout } i \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1.$$

Soit $s = \sum_{i=0}^{n} t_i s_i$ dans S alors si $\lambda \in [0,1[$.

$$\lambda s = \sum_{i=0}^{n} \lambda t_i s_i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda t_i + (1-\lambda)\alpha_i) s_i$$

Or $1-\lambda > 0$ et $\forall i$ $\alpha_i > 0$ donc $\forall i$ $\lambda t_i + (1-\lambda)\alpha_i > 0$.

et $\sum_{i=0}^{n} (\lambda t_i + (1-\lambda)\alpha_i) = 1$ (convexité de S, déjà vu)

Par conséquent $\forall \lambda \in [0,1[$ $\forall s \in S$ $\lambda s \in \mathring{S}$

soit $\underline{\lambda S \subset \mathring{S}}$.

7c. $\det(\hat{s}_0, \ldots, \hat{s}_n) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ s_0 & s_1 & \ldots & s_n \end{pmatrix}\right)$ ← Matrice dans $M_{n+1}(\mathbb{R})$

en soustrayant la première colonne à toutes les autres on obtient immédiatement $\det(\hat{s}_0, \ldots, \hat{s}_n) = \det(s_1 - s_0, \ldots, s_n - s_0)$,

soit $\underline{|\det(\hat{s}_0, \ldots, \hat{s}_n)| = n! \operatorname{Vol}(S)}$

Si on permute l'ordre des sommets à l'aide d'une permutation σ de $[0, \ldots, n]$ alors

$$\det(\hat{s}_{\sigma(0)}, \ldots, \hat{s}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(\hat{s}_0, \ldots, \hat{s}_n)$$

Or $|\varepsilon(\sigma)| = 1$, donc $\underline{\operatorname{Vol}(S) \text{ est inchangé}}$ (ce qui justifie a posteriori la notation $\operatorname{Vol}(S)$, qui aurait dû être au départ $\operatorname{Vol}(s_0, \ldots, s_n)$ pour mettre en évidence une éventuelle dépendance à l'ordre des sommets)

8a) - $s_0 = (0, 0)$ $s_1 = (0, n)$ $s_2 = (1, n)$.

$S = \{s_0, s_1, s_2\}$ est de volume $\frac{1}{2}n$. et ne contient aucun point intérieur entier. Il suffit de choisir $n \geq 2V$.

8b) $s_0 = (1, 0, 0)$ $s_1 = (0, 0, 1)$ $s_2 = (2, 1, 0)$ $s_3 = (1, 1, n)$

$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ $vol(S) = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & n \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & n \end{vmatrix} \right|$

$vol(S) = n - 1$. Choisir $n \geq V + 1$

vérifions que S ne contient pas d'autre point entier que ses sommets.

Soit t_0, t_1, t_2, t_3 positifs tels que $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = 1$

$t_0 s_0 + t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 = (t_0 + 2t_2 + t_3, \; t_2 + t_3, \; t_1 + n t_3)$.

$0 \leq t_2 + t_3 \leq 1$ donc $t_2 + t_3 \in \mathbb{Z}$ donne $t_2 + t_3 = 0$ ou $t_2 + t_3 = 1$.

Si $t_2 + t_3 = 1$ alors $t_0 = 0$ $t_1 = 0$

$t_2 + 1 \in \mathbb{Z}$ et $n t_3 \in \mathbb{Z}$ donc $t_2 = 0$ $t_3 = 1$
ou $t_2 = 1$ $t_3 = 0$

Si $t_2 + t_3 = 0$ $t_0 \in \mathbb{Z}$ $t_1 \in \mathbb{Z}$ $t_0 + t_1 = 1$ et $t_0 \geq 0$ $t_1 \geq 0$
donc $t_0 = 1$ $t_1 = 0$
ou $t_0 = 0$ $t_1 = 1$

Il n'y a bien que les quatre sommets qui soient des points entiers de S.

9a) Notons $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^+, -\lambda K \subset K\} = \{\lambda \in \mathbb{R}^*, \forall x \in K, -\lambda x \in K\}$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2$ $t \in [0, 1]$ et x dans K alors

$-((1-t)\lambda_1 + t\lambda_2)x = (1-t)\underbrace{(-\lambda_1 x)}_{\in K} + t\underbrace{(-\lambda_2 x)}_{\in K} \in K$ (car K est convexe)

Donc $(1-t)\lambda_1 + t\lambda_2 \in \Lambda$. Par conséquent Λ est une partie convexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle.

(10)

9.b) $0 \in \mathring{\mathcal{K}}$ donc il existe $r > 0$ $B(0,r) \subset \mathcal{K}$, $n \geq 1$ donc $B(0,r) \neq \{0\}$, par conséquent il existe x_0 dans $B(0,r)$, donc dans $\mathcal{K}$, non nul.

De plus $\mathcal{K}$ est compact donc borné. Il existe M tel que $\forall y \in \mathcal{K}\ \|y\| \leq M$.

Soit λ dans Λ alors $\|-\lambda x_0\| \leq M$ donc $|-\lambda| \|x_0\| \leq M$ et

$|-\lambda| = \lambda \leq \frac{M}{\|x_0\|}$. $\Lambda \subset [0, \frac{M}{\|x_0\|}]$ donc $\alpha(\mathcal{K}) \leq \frac{M}{\|x_0\|} < +\infty$.

. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \lambda_n$ $|\lambda_n - a(\mathcal{K})| < \frac{1}{2^n}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = a(\mathcal{K})$.

$\forall x \in \mathcal{K}$ $\forall n$ $-\lambda_n x \in \mathcal{K}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} -\lambda_n x = -a(\mathcal{K}) x$.

Or $\mathcal{K}$ est compact donc fermé et par conséquent $-a(\mathcal{K}) x \in \mathcal{K}$.

$\forall x \in \mathcal{K}$ $-a(\mathcal{K}) x \in \mathcal{K}$, donc $a(\mathcal{K}) \in \Lambda$ et $a(\mathcal{K})$ est un maximum.

9c) $\| \ \|$ est continue (car 1-lipschitzienne) et $\mathcal{K}$ est compact donc $\| \ \|$ atteint son maximum sur $\mathcal{K}$, disons en x_1.

Alors $-a(\mathcal{K}) x_1 \in \mathcal{K}$ donc $\|-a(\mathcal{K}) x_1\| \leq \|x_1\|$.

D'autre part $x_1 \neq 0$ ($B(0,r) \subset \mathcal{K}$, donc $\|x_1\| \geq r$) et $\|x_1\| \neq 0$

Finalement $|a(\mathcal{K})| \leq 1$ soit $a(\mathcal{K}) \leq 1$ (car $a(\mathcal{K}) \geq 0$).

D'autre part $\forall \lambda \geq 0$ avec $\lambda < \frac{r}{\|x_1\|}$ $\forall x \in \mathcal{K}$ $\|\lambda . x\| < r$ donc

$\forall \lambda < \frac{r}{\|x_1\|}$ $\lambda \in \Lambda$ (car $B(0,r) \subset \mathcal{K}$, donc $\|\lambda . x\| < r \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{K}$)

Il en résulte $\alpha(\mathcal{K}) \geq \frac{r}{\|x_1\|} > 0$.

9d) - Si $\alpha(\mathcal{K}) = 1$ alors $-\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, puis $-(-\mathcal{K}) \subset -\mathcal{K}$ soit $\mathcal{K} \subset -\mathcal{K}$ donc $-\mathcal{K} = \mathcal{K}$ et par conséquent $\mathcal{K}$ est symétrique.

- Si $\mathcal{K}$ est symétrique $-\mathcal{K} = \mathcal{K}$ donc $-\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ donc $\alpha(\mathcal{K}) \geq 1$ (car $1 \in \Lambda$) or $\alpha(\mathcal{K}) \leq 1$ donc $\alpha(\mathcal{K}) = 1$

(P.S. Dans la rédaction qui précède symétrique veut dire symétrique par rapport à O.)

10a) $\mathrm{Vol}(\beta S) = |\det(\beta s_1 - \beta s_0, \dots, \beta s_n - \beta s_0)| = \beta^n \mathrm{Vol}(S)$
(par multilinéarité du déterminant)

$$\mathrm{Vol}(S - x) = |\det(s_1 - x - (s_0 - x), \dots, (s_n - x) - (s_0 - x))| = \mathrm{Vol}(S).$$

On en déduit $\mathrm{Vol}\left(\frac{\lambda a}{a+1} S\right) = \lambda^n \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(S)$

Par conséquent $\underline{\lim_{\lambda \to 1^-} \mathrm{Vol}\left(\frac{\lambda a}{a+1} S\right) = \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(S)}$

<u>Deux cas sont possibles.</u>

. Si $\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(S)$ est entier alors $\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(S) > \rfloor \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(S) \lfloor$

car $\rfloor n \lfloor = n - 1$.

. Si $\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(S)$ n'est pas entier alors $\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(S) > \rfloor \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(S) \lfloor$.

<u>Dans les deux cas</u> $\underline{\lim_{\lambda \to 1^-} \mathrm{Vol}\left(\frac{\lambda a}{a+1} S\right) > \rfloor \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(S) \lfloor = k}$.

Il existe donc $\eta > 0$ tel que $\underline{\forall \lambda \in [1-\eta, 1[\quad \mathrm{Vol}\left(\frac{\lambda a}{a+1} S\right) > k}$.

10b) $\frac{a}{a+1} \in [0, 1[$ et λS est convexe et $0 \in \lambda S$ donc.

$$\frac{a}{a+1}(\lambda S) = \left\{ \frac{a}{a+1} \cdot x + \frac{1}{a+1} \cdot 0 \ , \ x \in \lambda S \right\} \subset \lambda S$$

Donc $\frac{\lambda a}{a+1} S \subset \lambda S$. (Ne sert à rien)

10b) $v_0, \dots, v_k$ sont $k+1$ points distincts dans $\frac{\lambda a}{a+1} S$.

$\forall (i,j) \quad v_i \in \frac{\lambda a}{a+1} S = \frac{a}{a+1} \lambda S \qquad -v_j \in \frac{\lambda}{a+1}(-a S) \subset \frac{\lambda}{a+1} S$

donc $\underline{v_i - v_j \in \frac{a}{a+1} \lambda S + \frac{1}{a+1} \lambda S}$. Or $\underline{\lambda S \text{ est convexe}}$.

donc $\underline{v_i - v_j \in \lambda S \subset \mathring{S}}$ (question 7b)

10c) De nombreuses solutions ont été proposées à cette question. Ma version initiale utilisait le fait que pour $i \neq j$ $\{x, \langle x, v_i \rangle = \langle x, v_j \rangle\}$, où $\langle \ , \ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, est un hyperplan et que $\mathbb{R}^n$ ne peut être la réunion d'un nombre fini d'hyperplans. Il existe donc a dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \neq j \ \langle a, v_i \rangle \neq \langle a, v_j \rangle$. On vérifie immédiatement que le j qui minimise $\langle a, v_j \rangle$ répond à la question.

D'autres ont utilisé un ordre lexicographique associé soit à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, soit à $(s_1 - s_0, \quad , s_r - s_0)$.

<u>La méthode retenue ici</u> est intéressante car elle s'adapte facilement pour montrer que la distance d'un point x de $\mathbb{R}^n$ à un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ est atteinte en un point unique.

<u>Soit $\cancel{j}$ tel que $\|v_j\| = \max\{\|v_i\|, \ 0 \leq i \leq k\}$.</u>

Montrons que pour tout couple (i, ℓ) avec $i \neq \ell$ $i \neq j$ $\ell \neq j$ on a $v_i - v_j \neq \pm(v_\ell - v_j)$ (et $\neq 0$!).

$+ \ v_i - v_j = v_\ell - v_j \iff v_i = v_\ell$ impossible

$+ \ v_i - v_j = v_j - v_\ell$ donc $v_i + v_\ell = 2 v_j$.

Or dans tout espace préhilbertien : <u>$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$</u>

c'est la très célèbre égalité du parallélogramme.

Ici on obtient

$$\underline{\|2v_j\|^2 + \|v_i - v_\ell\|^2 = 2(\|v_i\|^2 + \|v_j\|^2) \leq 4\|v_j\|^2}$$

donc $\|v_i - v_\ell\|^2 \leq 0$ <u>soit $v_i = v_\ell$</u> impossible aussi.

On a donc $\underline{\mathrm{card}(\mathring{S} \cap \mathbb{Z}^n) \geq 2k+1 = 2\left\rfloor \mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \right\lfloor + 1.}$

$$\mathrm{card}(\mathring{S} \cap \mathbb{Z}^n) \geq 2 \ \mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a}{a+1}\right)^n - 1$$

$$\geq \mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a}{a+1}\right)^n + \left(\mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a}{a+1}\right)^n - 1\right)$$

$$\underline{\mathrm{card}(\mathring{S} \cap \mathbb{Z}^n \geq \mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \geq \mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a(S)}{2}\right)^n}$$

<u>Sauf si</u> $\underline{\mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \leq 1.}$ Mais dans ce cas

$\mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a}{2}\right)^n \leq \mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \leq 1.$ et puis $0 \in \mathring{S} \cap \mathbb{Z}^n$

on a bien $\underline{\mathrm{card}(\mathring{S} \cap \mathbb{Z}) \geq \mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a(S)}{2}\right)^n}$