DM · 02 MP* 2 2017/2018

Concours Commun Centrale-Supélec PC 2016

I) L'opérateur de translation et l'opérateur de différence.

I.A) L'opérateur de translation

I.A.1) $\deg(\tau(P)) = \deg(P)$ $\quad cd(\tau(P)) = cd(P)$

En effet cela est vrai pour $P = aX^k$ $a \neq 0$ car

$$\tau(aX^k) = aX^k + \underbrace{a\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}X^{k-i}}_{\text{polynôme de degré au plus } k-1,\text{ nul si } k=0}$$

et de plus

$$\deg(P+Q) = \deg(P) \qquad cd(P+Q) = cd(P)$$

dès lors que $Q = 0$ ou $\deg Q < \deg P$.

On raisonne alors par récurrence sur $\deg(P)$ pour obtenir le résultat annoncé.

I.A.3) On a vu en I.A.1 que.

$$\forall k \geq 1 \qquad \tau(P_k) = X^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}X^{k-1-i} = P_k + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}P_{k-i}$$

$$\tau(P_k) = \sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{k-i}P_i$$

On a donc
$$M_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \binom{j-1}{j-i} & \text{si } 1 \leq i \leq j. \end{cases}$$

PS) I.A.2) On a clairement $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, par exemple par récurrence.

I.A.4) La matrice M est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1. ~~les~~ seules valeurs propres de M est 1. M n'est pas diagonalisable pour $n \geq 2$, sinon elle serait égale à I_n (ce qui n'est pas car $M_{1,2} = 1$).

I.A.5 τ est bijective car $\tau' \circ \tau = \tau \circ \tau' = Id_{\mathbb{R}[X]}$ où $\tau' : P \longmapsto P(X-1)$ (Rq : une seule des égalités aurait suffit car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie), donc $\underline{\tau^{-1} : P \longmapsto P(X-1)}$

On montrerait par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\tau^{-k} = P \longmapsto P(X-k)$

l'expression $\tau^k P = P(X+k)$ est donc vraie pour tout k dans $\mathbb{Z}$

I.A.6 $$\tau^{-1}(P_k) = X^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} X^{k-1-i}$$

On en déduit, comme en I.A.3

$$M^{-1}_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ (-1)^{j-i} \binom{j-1}{j-i} & \text{si } 1 \leq i \leq j \end{cases}$$

I.A.7 On a $\forall k$ $v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$

Si on écrit $X = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ on a

$$\forall i \quad y_i = v_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} u_j = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} x_{j+1}$$

$$\forall i \quad y_i = \sum_{j=1}^{i} \binom{i-1}{j-1} x_j = \sum_{j=1}^{i} \binom{i-1}{i-j} x_j = \sum_{j=1}^{n+1} M_{i,j} x_j$$

Donc $\underline{Q = {}^tM}$ (On s'en doutait un peu, même si M était plus tentant)

I.A.8 Avec les notations de la question précédente on a donc

$$X = {}^tM^{-1} Y$$

l'expression de M^{-1} et le calcul de la question précedente fait dans l'autre sens donnent

$$\forall k \quad u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

I.B L'opérateur de différence.

I.B.1) Si $\deg P \geqslant 1$ $\quad \underline{\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1}$ et $\underline{cd(\partial P)) = \deg(P)\ cd(P)}$

car $\forall k \geqslant 1$ $\quad \partial(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$

(on termine ensuite rigoureusement comme en I.A.1)

I.B.2). On a donc $\mathrm{Ker}(\delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$, et réciproquement si $P \in \mathbb{R}_0[X]$ $\delta(P) = 0$. En conclusion $\underline{\mathrm{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$

On a $\mathrm{Im}\,\delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Im}\,\delta = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathrm{Ker}\,\delta = n+1-1 = n$.

$\dim \mathrm{Im}\,\delta = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$

et finalement $\underline{\mathrm{Im}\,\delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$

I.B.3) Pour $j \in [2,n]$ $\quad \mathrm{Im}\,\delta^j = \delta(\mathrm{Im}\,\delta^{j-1})$.

On obtient donc facilement par récurrence $\underline{\mathrm{Im}\,\delta^j = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$.

Si $\deg(P) = j$ $([j \in [2,n])$ alors $\deg(\delta(P)) = j-1$.

Donc si $\mathrm{Ker}\,\delta^{j-1} \supset \mathbb{R}_{j-2}[X]$, on aura $\delta^j(P) = \delta^{j-1}(\delta(P)) = 0$

On obtient donc par récurrence : $\forall j \in [2,n]$ $\quad \mathrm{Ker}\,\delta^j \supset \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

En combinant cette inclusion avec $\mathrm{Im}\,\delta^j = \mathbb{R}_{n-j}[X]$ et le théorème du rang on obtient $\underline{\mathrm{Ker}\,\delta^j = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$

I.B.4) On a $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ les éléments τ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ commutent. On donc

$$\delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \tau^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j$$

En particulier

$$\underline{\delta^k(P) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(X+j)}$$

I.B.5) $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\underline{\delta^{n}(P)=0}$

En substituant 0 à X dans le résultat obtenu à la question précédente on obtient immédiatement.

$$\underline{\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0}$$

I.B.6)

a) $\underline{u \circ \delta^2 = \delta^3 = \delta \circ u}$.

b) $\mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Ker} \delta^2$ et $\delta^2 \circ u = u \circ \delta^2$ donc $\underline{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est telle que. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$ alors

$A^3 = AB = BA$ donc $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\underline{A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}}$

et $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ Donc $\underline{A^2 = B} \iff \begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$ ce qui est $\underline{\text{impossible}}$.

d) Si $u \circ u = \delta$ et qu'on considère les matrices A et B de $\tilde{u}$ et $\tilde{\delta}$, dans la base $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ on a

$$A^2 = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ce qui est impossible. $\underline{\text{Donc il n'existe pas de } u \text{ tel que } u \circ u = \delta}$

PS $\tilde{u}$ et $\tilde{\delta}$ sont les endomorphismes induits par u et δ sur $\mathbb{R}_1[X]$

I.B.7) a) $\deg(\delta^j(P)) = d - j$ donc la famille $(P, \delta(P), \quad, \delta^d(P))$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. Elle est donc libre.

La dimension du sous espace engendré par cette famille est $d+1$.

[On remarquera que puisque $\delta(\delta^j(P)) = \delta^{j+1}(P)$ pour $0 \le j \le d-1$ et $\delta(\delta^d(P)) = 0$, ce sous-espace est stable par δ] $\underline{\text{Il est égal à } \mathbb{R}_d[X]}$ car il est contenu dans $\mathbb{R}_d[X]$.

b) Soit V sous-espace stable par δ, non réduit à $\{0\}$. Soit $d+1$ sa dimension On ne peut pas avoir $V \subset \mathbb{R}_{d-1}[X]$. $\underline{\text{Donc } V}$ $\underline{\text{contient un polynôme de degré } d' \geq d}$.

D'après le a) ~~\[illegible\]~~ $\mathbb{R}_{d'}[X] \subset V$, donc $d'+1 \le d+1$.

Finalement $\underline{d' = d \text{ et } V = \mathbb{R}_d[X]}$.

II Applications en combinatoire.

II.A quelques cas particuliers

II.A.1) $S(p,n) = 0$ si $p < n$. (S'il existe une surjection de l'ensemble fini X vers l'ensemble fini Y alors $\text{card}(X) \geq \text{card}(Y)$)

II.A.2) Une surjection de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ est nécessairement bijective, donc $S(n,n) = n!$

II A.3) $S(n+1,n) = \frac{n(n+1)}{2} n!$ (on regroupe les deux éléments qui vont avoir la même image (soit $\frac{n(n+1)}{2}$ possibilités), on est alors ramené au II.A.2.

Plus généralement $S(p,n) = P_{p,n} \times n!$ où $P_{p,n}$ est le nombre de partitions d'un ensemble à p éléments en n sous-ensembles non vides et disjoints.

II.B) Recherche d'une expression générale.

II.B.1) Il y a n^p applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$

II.B.2) Soit Y un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$ et $\mathcal{A}_Y$ l'ensemble des surjections de $[\![1,p]\!]$ vers Y.

Alors $\text{card}\, \mathcal{A}_Y = S(p, \text{card}(Y))$ et $(Y)_{Y \in \mathcal{P}([\![1,p]\!])}$ est une partition de $\mathcal{A}([\![1,p]\!],[\![1,n]\!]) = \mathcal{A}$

Donc $$n^p = \text{card}(\mathcal{A}) = \sum_{Y \in \mathcal{P}([\![1,p]\!])} S(p, \text{card}(Y)).$$

Et puisqu'il a $\binom{n}{k}$ parties de $[1,n]$ de cardinal k.

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p,k).$$

II.C)

II.C.1) En utilisant la relation (II.2) obtenue en I.A.8 et en remarquant qu'on a effectivement bien (I.1) en posant
$$u_k = S(p,k) \qquad 0 \leq k \leq n$$
$$v_k = k^p$$

(d'après la question précédente pour $1 \leq k \leq n$. (le k de la question actuelle est le n de la question précédente) et car $S(p,0) = 0^p = 0$ pour $p \geq 1$.

On obtient donc
$$\forall n \in [0,p] \qquad S(p,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

(On remarquera que pour $n > p$ on retrouve le résultat (I.4) pour $P = X^p$)

On en déduit
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} n!$$

(Et, puisqu'il reste de la place :
$$S(n+2,n) \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)n(3n+1)}{24} n!$$

On devine aisément qu'il n'existe pas de formule simple pour $S(p,n)$)

III Etude d'une famille de polynômes

III.A) Généralités

III.A.1) $\forall k \quad \deg(H_k) = k$ donc $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre.

Elle est de cardinal $n+1$ ($= \dim \mathbb{R}_n[X]$) c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$

III.A.2) $\delta(H_0) = 0$

$$\partial(H_k) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=-1}^{k-2}(X-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\,\left(X+1-(X-(k-1))\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\,.\,k$$

$$\underline{\partial(H_k) = H_{k-1}}$$

(En toute rigueur ce calcul n'est valable que pour $k \geq 1$.
On vérifie $\partial(H_1) = H_0$ $(X+1-X=1)$!)

III.A.3) M est la matrice de $\tau = \delta + Id_{\mathbb{R}_n[X]}$ dans la base $(1, X, \ \ , X^n)$ et M' la matrice du même endomorphisme dans la base $(H_0, H_1, \ \ , H_n)$. M et M' sont donc semblables.

III.A.4) Si $k > \ell$ $\quad \delta^k(H_\ell) = 0$ donc $\delta^\ell(H_\ell)(0) = 0$

Si $k \leq \ell$ $\quad \delta^k(H_\ell) = H_{\ell-k}$ donc $\delta^k(H_\ell)(0) = H_{\ell-k}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k\neq\ell \\ 1 \text{ si } k=\ell \end{cases}$

III.A.5) $(H_k)_{k\in[0,n]}$ est une base. Donc on peut écrire

$P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$. Pour $\ell \in [\![0, n]\!]$ on aura, par linéarité

$\partial^\ell(P)(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k \,\delta^\ell(H_k)(0) = a_\ell$. Donc $\underline{P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0)\, H_k}$.

III. B Etude d'un exemple.

III. B. 1. $P_0 = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$

$\partial(P_0) = 3X^2 + 3X + 1 + 2(2X+1) + 5 = 3X^2 + 7X + 8$

$\partial^2(P_0) = 3(2X+1) + 7 = 6X + 10$

$\partial^3(P_0) = 6.$

Donc $\underline{\underline{P_0 = 7H_0 + 8H_1 + 10H_2 + 6H_3}}$

III. B. 2 Les polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ tels que $\delta^2(P) = P_0$ sont

les $7H_2 + 8H_3 + 10H_4 + 6H_5 + \alpha H_0 + \beta H_1 \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$

On peut prendre par exemple

$\underline{\underline{P_1 = 7H_2 + 8H_3 + 10H_4 + 6H_5}}$

III. B. 3 Si on pose $v_k = P_1(k)$ alors

$v_{k+2} - 2v_{k+1} + v_k = \delta_2^2(P_1)(k) = P(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7.$

Une solution particulière de la récurrence linéaire est

donc $(P_1(k))_{k \geq 0}$

Pour trouver la solution générale, il suffit de lui ajouter

une solution de l'équation homogène

$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = 0$

dont l'équation caractéristique est $(\lambda - 1)^2 = 0$ et dont

la solution est donc $\alpha(k)_{k\geq 0} + \beta(1)_{k \geq 0}$.

Les solutions générales de la récurrence linéaire sont

donc les suites

$\underline{\underline{(\beta + \alpha k + 7H_2(k) + 8H_3(k) + 10H_4(k) + 6H_5(k))_{\geq 0}}}$

(α, β) décrivant $\mathbb{R}^2$.

III.C) Polynômes à valeurs entières.

III.C.1) Si $k \geq n$. $H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k-j) = \frac{k!}{n!\,(k-n)!}$

Si $k \geq n$ $H_n(k) = \binom{k}{n}$

Si $0 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$ $H_n(k) = 0$

Si $k < 0$ $H_n(k) = \frac{1}{n!}(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (-k+j) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-k+n-1)!}{(-k-1)!}$

Si $k < 0$ $H_n(k) = (-1)^n \binom{-k+n-1}{n} = (-1)^n \binom{|k|+n-1}{n}$

III.C.2) les calculs de la question précédente établissent immédiatement $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

III.C.3) $\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k) \in \mathbb{Z}$ dès que $\forall k\ P(k) \in \mathbb{Z}$.

III.C.4) Soit P tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, alors, par récurrence, on aura $\forall k \in \mathbb{N}$ $\delta^k(P)(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ (d'après III.C.3)

Donc, d'après III.A.5 les coordonnées de P sur la base (H_k) sont à valeurs entières.

Réciproquement si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$ où $a_k \in \mathbb{Z}$ pour tout k alors : $\forall \ell \in \mathbb{Z}$ $P(\ell) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{H_k(\ell)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$

et $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

III.C.5) Un tel P est de la forme $\sum_{k=0}^{d} a_k H_k$ $a_k \in \mathbb{Z}$ $0 \leq k \leq d$

or $\forall k \leq d$ $d!\, H_k$ est à coefficients entiers donc.

$d!\, P$ est à coefficients entiers.

+ La réciproque est fausse $2!(X^2 + \frac{1}{2})$ est à coefficient entiers mais $(X^2 + \frac{1}{2})(0) \notin \mathbb{Z}$.

IV) Généralisation de l'opérateur de différence et application.

IV.A)

IV.A.1) $\delta(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ car $x \mapsto x+1$ est $\mathcal{C}^\infty$, la composée de deux fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est $\mathcal{C}^\infty$ et la différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\delta(f') = (\delta(f))'$$

IV.A.2) Pour la même raison que dans la partie I, en généralisant les résultats sur les polynômes aux fonctions à l'aide des mêmes démonstration.

$$\delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$$

IV.A.3) On applique l'égalité des accroissements finis à f qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, x+1]$ et à valeurs réelles

$$(\delta(f))(x) = (1-0)\, f'(c) \qquad c \in]x, x+1[$$

$$\delta(f)(x) = f'(x+y_1) \qquad y_1 \in]0,1[.$$

IV.A.4) Le résultat est vrai pour $n=1$ (et $n=0$).

Etablissons le par récurrence.

On le suppose vrai à l'ordre $n-1$ $(n \geq 2)$ pour tout f et tout x.

Il est vrai pour $\delta(f)$ en x donc

$$\delta^n(f)(x) = \delta^{n-1}(\delta(f))(x) = (\delta(f))^{(n-1)}(x+y_{n-1}) \qquad y_{n-1} \in]0, n-1[$$

$$= \delta(f^{(n-1)})(x+y_{n-1}) = (f^{(n-1)})'(x+y_{n-1}+z_1) \qquad z_1 \in]0,1[$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n) \qquad y_n \in]0, n[$$

le résultat est donc vrai à l'ordre n.

IV. B 1) Si $k = 1$ $k^\alpha = 1 \in \mathbb{N}^*$

Si $k \geq 2$ $k = \prod_{j=1}^{N} p_j^{m_j}$ p_j premier, $m_j \in \mathbb{N}^*$

$k^\alpha = \prod_{j=1}^{N} (p_j^\alpha)^{m_j} \in \mathbb{N}^*$ car $\forall j$ $p_j^\alpha \in \mathbb{N}^*$

IV. B. 2) Si $\alpha < 0$ alors $\lim_{k \to +\infty} k^\alpha = 0$ et il existe donc k_0 tel que $0 < k_0^\alpha < 1$ ce qui contredit $k_0^\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\alpha \geq 0$

IV. B. 3) - Si α est un entier $f_\alpha^{\alpha+1} = 0$ donc $f_\alpha^{\alpha+1}$ s'annule au moins en un réel strictement positif.

- Si α n'est pas un entier.

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $\forall r \in \mathbb{N}$ $f^{(r)}(x) = \underbrace{\prod_{j=0}^{r-1} (\alpha - j)}_{\neq 0} \underbrace{x^{\alpha - r}}_{\neq 0} \neq 0$

et aucune des dérivées de f ne s'annule en un réel strictement positif.

IV. C)

IV. C. 1) $\forall j$ $\binom{r}{j} \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $(-1)^j \in \mathbb{Z}$ $f_\alpha(x+j) \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ est un anneau donc un sous-anneau de $\mathbb{R}$ donc $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{r}{j} f_\alpha(x+j) \in \mathbb{Z}$

IV. C. 2) - Si α est un entier $f_\alpha^{(n)}(x + y_n) = 0$ donc

$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha^{(r)}(x + y_r) = 0$

- Si α n'est pas un entier $f_\alpha^{(r)}(x + y_r) = \prod_{j=0}^{r-1} (\alpha - j) (x + y_r)^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor - 1}$

Or $\lim_{x \to +\infty} x + y_r = +\infty$ et $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor - 1 < 0$. Donc.

$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha^{(n)}(x + y_r) = 0$

IV. C. 2) On a $\lim_{x \to +\infty} f_\alpha^{(r)}(x + y_n) = 0$ et $f_\alpha^{(n)}(x + y_n) \in \mathbb{Z}$.

Il existe donc x_0 tel que $\forall x \in]x_0, +\infty[$ $f_\alpha^{(r)}(x + y_n) = 0$

D'après IV. B. 3) Ceci prouve que α est un entier.