Exercice 11. 1) $0 \leq r < R$ donc $|re^{it}| < R$ donc $\forall t \in [0, 2\pi]$ $f(re^{it})e^{-int} = \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{r^p a_p e^{i(p-n)t}}_{u_p(t)}$

chaque u_p est continue sur $[0, 2\pi]$; $\forall t \in [0, 2\pi]$ $|u_p(t)| \leq r^p |a_p|$ et $\sum_{p \geq 0} |a_p| r^p$ converge car $r < R$. Donc $\sum_{p \geq 0} u_p$ est une série normalement convergente, donc uniformément convergente, sur le segment $[0, 2\pi]$, de fonctions continues.

On peut donc permuter intégration et sommation et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} \, dt = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t} \, dt = a_n r^n$$

(car $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\int_0^{2\pi} e^{ikt} \, dt = 0$ si $k \neq 0$ $\left(= \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi}\right)$ et $\int_0^{2\pi} e^{i0t} \, dt = 2\pi$).

2) On applique la même méthode avec $|f(re^{it})|^2 = \overline{f(re^{it})} f(re^{it})$

$\forall t \in [0, 2\pi]$ $|f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\bar{a}_n r^n e^{-int} f(re^{it})}_{w_n(t)}$, avec $|w_n(t)| \leq |a_n| r^n \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(re^{it})|$

et $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(re^{it})|$ existe car $t \mapsto f(re^{it})$ est continue car f est continue sur $D(0, R)$.

On conserve donc une convergence uniforme sur un segment. On peut permuter.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a}_n r^n \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a}_n r^n a_n r^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$