Exercice 10)

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ et la série converge absolument.

On peut donc effectuer, pour tout couple (z, z') dans $\mathbb{C}^2$, un produit de Cauchy :

$$(\exp z)(\exp z') = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z'^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} z^p \frac{1}{(n-p)!} z'^{n-p}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!\,(n-p)!} z^p z'^{n-p}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} z^p z'^{n-p}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p z'^{n-p}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z+z')^n.$$

$$\boxed{(\exp z)(\exp z') = \exp(z+z')}$$