Exercice 9

1) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_x \quad \forall n \geq n_x. \quad f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, plus précisément

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \geq n_x \; (= \lceil x \rceil$ par exemple$) \quad f_n(x) = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}$

$\forall n \geq n_x. \quad f_n(x) = \exp\left(n\left(-\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-x + o(1))$

$\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ n \geq n_x}} f_n(x) = e^{-x}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-x}$

$(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$.

2) Si $x \geq n$ $\quad f_n(x) = 0$

Si $x \in [0, n[$ $\quad f_n(x) = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})} \leq e^{-n \frac{x}{n}} = e^{-x}$ car $\begin{cases} \ln(1+u) \leq u \\ \text{(concavité de ln sur }]-1, +\infty[\text{)} \\ \text{exp est croissant} \end{cases}$

Dans les deux cas $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$.

q.e.d