Exercice 8 $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. $\quad$ posons $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$

chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ avec

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]1, +\infty[. \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$

Soit $A > 1$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq 1 \quad \forall x \in [A, +\infty[\quad |u_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^A} = \alpha_{n,k}$

$\alpha_{n,k} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{A+1}{2}}}\right)$ (car $A = \frac{A+1}{2} + \frac{A-1}{2}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{\frac{A-1}{2}}} = 0$

car $\frac{A-1}{2} > 0$)

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{A+1}{2}}}$ converge car $\frac{A+1}{2} > 1$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall A > 1 \quad \sum_{n \geq 1} u_n^{(k)}$ converge normalement

donc uniformément sur $[A, +\infty[$.

On en déduit que $f_{|[A,+\infty[}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $A > 1$

donc f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

q.e.d