<u>Exercice 7 :</u> 1) $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$, décroissante et possède une limite en $+\infty$ (0).

Donc $\sum_{n\geq 1} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt\right)$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) = C$ existe

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \int_1^n \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) + \frac{1}{n}$.

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n = \alpha \text{ existe}}$.

2) $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ (On retrouve la convergence de $\sum(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ donc la convergence de (α_n))

$\alpha_{n+1} - \alpha_n$ est donc négatif à partir d'un certain rang. On peut appliquer le théorème de sommation des équivalents.

$$\alpha - \alpha_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Or $\forall N \geq n+1$
$$\int_n^N \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{N^2} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{n^2}$$
car $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante

En faisant tendre N vers $+\infty$: $\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Et par conséquence $\boxed{\alpha_n - \alpha \sim \frac{1}{2n}}$.