Exercice 6 :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{x_n} + \underbrace{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{z_n}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après la règle de Leibniz :

$\sum_{n\geq 1} x_n$ converge

$z_n \sim \frac{1}{n}$ donc z_n est positif pour n assez grand, et d'après la règle de Riemann

$\sum z_n$ diverge.

Donc $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} x_n + z_n = \sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} z_n$, c'est-à-dire somme d'une série convergente et d'une série divergente, diverge.