Exercice 4 : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace vectoriel normé.

Montrons que F est fermé en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés :

" Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F, convergeant vers un élément ℓ de E. Il s'agit de prouver que ℓ est dans F. "

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (dans E) donc bornée.

Or de toute suite bornée ~~des~~ d'éléments de F on peut extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ car F est de dimension finie.

La suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge (pour la norme $\| \ \|$, donc dans E aussi) vers un élément ℓ' de F. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$ (suite extraite d'une suite convergente) donc $\ell' = \ell$ et $\ell \in F$

q.e.d.