Exercice 3 : A est non vide. $\boxed{d(x,A) = \inf_{y \in A} \|x-y\|}$

Soit $(x,x') \in E^2$ $\quad \forall y \in A \quad \|x-y\| \leq \|x-x'\| + \|x'-y\|$

donc $\forall y \in A \quad d(x,A) \leq \|x-x'\| + \|x'-y\|$ car $d(x,A) \leq \|x-y\|$

donc $\forall y \in A \quad d(x,A) - \|x-x'\| \leq \|x'-y\|$

donc $d(x,A) - \|x-x'\| \leq d(x',A)$ car $d(x,A) - \|x-x'\|$ est en minorant de $\{\|x'-y\|, y \in A\}$

donc $d(x,A) - \|x-x'\| \leq d(x',A)$

finalement $\boxed{d(x,A) - d(x',A) \leq \|x-x'\|}$

En permutant x et x' $\quad d(x',A) - d(x,A) \leq \|x'-x\| = \|x-x'\|$

et en conclusion $\boxed{|d(x,A) - d(x',A)| \leq \|x'-x\|}$

q.e.d.