Exercice 2

* Si un des $x_i$ est nul le résultat est vrai car $\sum x_i \geq 0$ et $\prod x_i = 0$

* On peut donc supposer $\forall i \ x_i > 0$

ln est concave sur $\mathbb{R}^{*+}$, car de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \ \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$.

On a donc, d'après l'inégalité de Jensen :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n \quad \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

Or exp est croissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$