Exercice 1 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ quatre fois dérivable et $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$

* Soit x dans $]0,1[$. Et $\varphi_x : t \mapsto f(t) - A_x (t(1-t))^2$ où A_x est choisi tel que $\varphi_x(x) = 0$ ($A_x = \frac{f(x)}{(x(1-x))^2}$).

φ_x est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et à valeurs réelles

$\varphi_x(0) = \varphi_x(x) = 0$ donc il existe a_1 dans $]0,x[$ tel que $\varphi'(a_1) = 0$

De même il existe a_2 dans $]x,1[$ tels que $\varphi'(a_2) = 0$.

$\varphi'_x(0) = \varphi'_x(1) = \cancel{f'(0)}\, 0$ (car $f'(0) = 0$ et 0 et 1 sont racines doubles de $(X(1-X))^2$.)

φ'_x est continue sur $[0,1]$, s'annule en $0, a_1, a_2$ et 1 avec $0 < a_1 < a_2 < 1$ et est à valeurs réelles. D'après le théorème de Rolle il existe $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3$ tels que $\varphi''_x(b_1) = \varphi''_x(b_2) = \varphi''_x(b_3) = 0$.

Une nouvelle application de ce théorème donne l'existence de c_1, c_2 avec $b_1 < c_1 < b_2 < c_2 < c_3$ et $\varphi'''(c_1) = \varphi'''(c_2) = 0$.

Une ultime application donne l'existence de c ($0 < c_1 < c < c_2 < 1$) tel que $\varphi_x^{(4)}(c) = 0$.

Or $(X(1-X))^2$ est un polynôme unitaire de degré 4. Sa dérivée quatrième est 24

Donc $0 = f^{(4)}(c) - 24 A_x$ et $A_x = \frac{f^{(4)}(c)}{24}$ Or $\varphi_x(x) = 0$ donc $f(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{24}(x(1-x))^2$

* Si $x \in \{0,1\}$ on peut choisir $c = \frac{1}{2}$