Exercice 12 On pose $\|A\| = \sup_{\|X\|_2 \leq 1} \|AX\|_2$, $\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. On vérifie qu'il s'agit d'une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ (On pouvait aussi choisir $\|A\| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$).

Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{C})^2$ $AB = BA$. alors $\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$ $\exp B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} B^n$.

chacune de ces séries convergeant absolument.

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} B^\ell\right) - \sum_{p=0}^{N} \left(\sum_{p=k+\ell} \frac{1}{k!}\frac{1}{\ell!} A^k B^\ell\right) = S_N \quad (*)$$

$$S_N = \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq N \\ k+\ell > N}} \frac{1}{k!}\frac{1}{\ell!} A^k B^\ell, \text{ donc } \|S_N\| \leq \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq N \\ k+\ell > N}} \frac{1}{k!}\frac{1}{\ell!} \|A\|^k \|B\|^\ell$$

$$\|S_N\| \leq \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \|A\|^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} \|B\|^\ell\right) - \sum_{p=0}^{N} \sum_{k+\ell=p} \frac{1}{k!}\frac{1}{\ell!} \|A\|^k \|B\|^\ell$$

$$\|S_N\| \leq \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \|A\|^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} \|B\|^\ell\right) - \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} (\|A\| + \|B\|)^p = \alpha_N$$

$$\lim_{N \to +\infty} \alpha_N = (\exp \|A\|)(\exp \|B\|) - \exp(\|A\| + \|B\|) = 0 \quad \text{donc } \lim_{N\to+\infty} S_N = 0$$

Or $\sum_{k+\ell=p} \frac{1}{k!}\frac{1}{\ell!} A^k B^\ell = \frac{1}{p!}(A+B)^p$ car A et B commutent

En passant à la limite dans $(*)$ (continuité du produit matriciel)

$$(\exp A)(\exp B) = \exp(A+B)$$