Exercice 11.

1) $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

A est annulé par $P = (X^3 + X - 2)$ donc toute valeur propre de A est racine de P. Or $P = (X-1)(X^2+X+2)$

$(\cancel{\Delta}\ (-1)^2 - 4 \times 2 = -7 < 0$, donc $X^2 + X + 2$ n'a pas de racine réelle$)$

Donc $Sp(A) \subset \{1\}$, et pour $n \geqslant 1$ $Sp(A) = \{1\}$

$A = P_1 I_n P_1^{-1} = I_n$ $\qquad \mathcal{S} = \{I_n\}$

2) ~~Ecrivons~~ $P = (X-1)(X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ ~~Pannule A~~

P annule A donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, \cancel{\lambda}, \bar{\lambda}\}$ (et A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, car P est à racines simples).

Notons m_1, m_λ et $m_{\bar{\lambda}}$ les multiplicités de 1, λ et $\bar{\lambda}$ comme valeurs propres de A, en s'autorisant des valeurs nulles.

Alors $\det A = 1^{m_1} \lambda^{m_\lambda} \bar{\lambda}^{m_{\bar{\lambda}}}$

Or $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ car $A \in M_n(\mathbb{R})$

donc $m_\lambda = m_{\bar{\lambda}}$ et $\det A = |\lambda|^{2m_\lambda} > 0$