<u>Exercice 10</u>. le domaine d'étude de la fonction aurait du être précisé dans l'énoncé pour moins d'ambiguité.

On étudie f sur $\underbrace{]-1,+\infty[}_{I}$ (On pourrait montrer que c'est son domaine de définition)

1) + $\forall t \in]0,1[$ $x \mapsto g(x,t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est continue.

+ $\forall x \in]-1,+\infty[$ $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux

+ Soit $a > -1$. $\forall (x,t) \in [-a,+\infty[\times]0,1[$ $|g(x,t)| \leq \frac{1-t}{|\ln t|} t^a = \varphi_a(t)$

φ_a est continue sur $]0,1[$.

$\lim_{t \to 1} \varphi_a(t) = 1$ $\qquad \varphi_a(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{-a}}\right)$ avec $-a < 1$.

Donc φ_a est intégrable sur $]0,1[$.

Il résulte de ces trois points que f est définie et continue sur $[a,+\infty[$, pour tout $a > -1$, donc <u>f est définie et continue sur I</u>.

2) - $\frac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \mapsto (t-1)t^x$ est définie sur $I \times]0,1[$

- $\forall x \in I$ $g(x,\cdot)$ est intégrable

- $\forall x \in I$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux

- $\forall t \in]0,1[$ $\frac{\partial g}{\partial x}(\cdot,t)$ est continue.

- $\forall [a,b] \subset I$ $\forall x \in [a,b]$ $\forall t \in]0,1[$ $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq t^a$ et $t \mapsto t^a$ est intégrable sur $]0,1[$.

Il résulte de tout ceci que f est $\mathcal{C}^1$ sur I avec.

$$\forall x \in I \qquad \underline{f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^1 (t-1)t^x\,dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}}$$

3) On a donc $\boxed{f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + C}$.

Or $\forall t \in]0,1[$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{t-1}{\ln t} t^x = 0$.

$\forall t \in]0,1[$ $\forall x \geq 0$ $\left|\frac{t-1}{\ln} t^x\right| \leq \frac{1-t}{|\ln t|} = \varphi_0(t)$ φ_0 intégrable.

<u>le théorème de convergence dominée étendu</u> donne $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^1 0 = 0$, soit $\boxed{f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}}$