Exercice 9 Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ C est diagonalisable (car symétrique réelle), plus précisément $\chi_C = X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$. Donc $\boxed{C = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}}$ $(*)$

Ecrivons $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Posons $Q = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$, $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$

En effectuant un produit par blocs on obtient $Q\tilde{Q} = I_{2n}$ donc Q est inversible et $\tilde{Q} = Q^{-1}$.

Un nouveau produit par blocs, justifié par $(*)$, donne

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} -\cancel{I_n}A & 0 \\ 0 & 3\cancel{I_n}A \end{pmatrix} Q^{-1}}.$$

Donc, $\underline{B \text{ est diagonalisable ssi } \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$

<u>Supposons B diagonalisable</u>, il existe alors L scindé à racines simples tel que $L(B) = \begin{pmatrix} L(-A) & 0 \\ 0 & L(3A) \end{pmatrix} = 0$. Donc $L(-A) = 0$ et $-A$ et <u>donc A est diagonalisable</u>

<u>Réciproquement</u> si A est diagonalisable, il existe S_{-1} scindé à racines simples tel que $S_{-1}(-A) = 0$ car $-A$ est diagonalisable, et de même un S_3. En prenant $L = \text{ppcm}(S_{-1}, S_3)$ alors L est scindé à racines simples et $L(B) = 0$ donc B est diagonalisable.

(<u>Remarque</u> : on peut aussi écrire $A = PDP^{-1}$ $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & 3D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ ← on vérifie qu'il s'agit de $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1}$