Exercice 7 : Soit $E_{k,l} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$

On rappelle que $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$ ($\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker)

Soit M dans $Z(M_n(\mathbb{K}))$ alors $M = \sum_{k,l} m_{k,l} E_{k,l}$ et $\forall i,j$ $E_{i,j}M = ME_{i,j}$

donc $\forall i,j$ $\sum_{k,l} m_{k,l} E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{k,l} m_{k,l} E_{k,l}.E_{i,j}$

$$\underline{\sum_{l=1}^{n} m_{j,l} E_{i,l} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} E_{k,j}}$$

Pour $l \neq j$ $\forall k$ $(i,l) \neq (k,j)$ donc $m_{j,l} = 0$

Pour $l = j$ ~~et k = i~~ $(k,j) = (i,l)$ ssi $k = i$ et $m_{j,j} = m_{i,i}$

Finalement $\forall i \neq j$ $m_{j,i} = 0$ et $\forall i,j$ $m_{i,i} = m_{j,j}$

donc $\underline{M = m_{1,1} I_n \in \mathbb{K} I_n}$.

Réciproquement si $M \in \mathbb{K} I_n$ $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ $MA = AM$ et $M \in Z(M_n(\mathbb{K}))$

En conclusion $\underline{Z(M_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K} I_n}$