Exercice 6

$A = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\1&0&9\end{pmatrix}$ $\qquad \chi_A = (X-1)(X-4)(X-9).$

χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

$A = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}P^{-1} = PDP^{-1}$. Ecrivons $X = P\Delta P^{-1}$, $\Delta \in M_3(\mathbb{R})$

$X^2 = A \iff P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = PDP^{-1} \iff P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} \iff \Delta^2 = D$

$$X^2 = A \iff \begin{cases} X = P\Delta P^{-1} \\ \Delta^2 = D \\ \Delta D = D\Delta \ (= \Delta^3) \end{cases}$$

Or si $\Delta = (d_{i,j})_{1\le i,j\le 3}$ $\quad \Delta D = (\lambda_j d_{i,j})$ $\quad D\Delta = (\lambda_i d_{i,j})$ avec $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (1,4,9)$

Donc $\Delta D = D\Delta \iff d_{i,j} = 0$ si $i \neq j \iff \Delta = \mathrm{diag}(d_{1,1}, d_{2,2}, d_{3,3})$

$$X^2 = A \iff \begin{cases} X = P\Delta P^{-1} \\ \Delta = \mathrm{diag}(d_{1,1}, d_{2,2}, d_{3,3}) \\ \forall i \quad d_{i,i}^2 = \lambda_i \end{cases} \iff \boxed{X = P\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&2\varepsilon_2&0\\0&0&3\varepsilon_3\end{pmatrix}P^{-1}.} \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

Pour éviter de calculer P et surtout P^{-1}, considérons le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$L = \varepsilon_1 \frac{(X-4)(X-9)}{(1-4)(1-9)} + 2\varepsilon_2 \frac{(X-1)(X-9)}{(4-1)(4-9)} + 3\varepsilon_3 \frac{(X-1)(X-4)}{(9-1)(9-4)}.$$

Puisque $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ on a $L(A) = L(PDP^{-1}) = PL(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix}L(1)&0&0\\0&L(4)&0\\0&0&L(9)\end{pmatrix}P^{-1}$

Donc $\boxed{\frac{\varepsilon_1}{24}(A-4I_3)(A-9I_3) - \frac{2\varepsilon_2}{15}(A-I_3)(A-9I_3) + \frac{3}{40}\varepsilon_3(A-I_3)(A-4I_3) = L(A) = P\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&2\varepsilon_2&0\\0&0&3\varepsilon_3\end{pmatrix}P^{-1} = X}$