Exercice 5. 1) $t \mapsto te^{-st}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

$|te^{-st}| = te^{-\mathrm{Re}(s)t}$.

Donc si $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ $\lim\limits_{t\to+\infty} |te^{-st}| = +\infty$ et $f_s : t \mapsto te^{-st}$ n'est pas intégrable

si $\mathrm{Re}(s) > 0$ $f_s(t) \underset{+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}t}\right)$ $\left(\text{ou } o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$ donc f_s est intégrable

Supposons $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} te^{-st}\,dt = \left[\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}}$$

2) $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ $\frac{1}{e^t+1} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t}(-e^{-t})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nt}$ (car $e^{-t} \in [0,1[$)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ $g_x(t) = \frac{t\cos xt}{e^t+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \underbrace{(\cos xt)te^{-(nt)}}_{f_n(t)}$

- Chaque f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{*+}$
- Chaque f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$ car $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ $|f_n(t)| \leq te^{-nt}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt \leq \int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dt = \frac{1}{n^2}$

  et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$ converge.

Il résulte de ces trois points que g_x est intégrable avec

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\cos(xt)}{e^t+1}\,dt = \int_0^{+\infty} g_x(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} (\cos(xt))te^{-nt}\,dt$$

Or $\int_0^{+\infty} \cos(xt)\, te^{-nt}\,dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt}\, te^{-nt}\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(n-ix)^2}\right)$

On peut donc affirmer

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}}$$

PS : On pourrait aussi développer $\cos(xt)$ en série entière de xt et permuter de même Σ et $\int$