Exercice 4

Soit A dans $M_n(\mathbb{K})$. A possède au plus n valeurs propres et tous les $\frac{1}{2^p}$, $p \geq 0$, sont distincts, donc

$$\exists p_0 \quad \forall p \geq p_0 \quad \det\left(A - \frac{1}{2^p} I_n\right) \neq 0 \qquad \left(\text{car } \frac{1}{2^p} \notin Sp(A)\right)$$

$$\underline{\exists p_0 \quad \forall p \geq p_0 \quad A - \frac{1}{2^p} I_n \in GL_n(\mathbb{K})}$$

Or $\underline{\lim_{p \to +\infty} A - \frac{1}{2^p} I_n = A}$. Donc $\underline{A \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}}$.

et $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = M_n(\mathbb{K})$ ($GL_n(\mathbb{K})$ est dense)

Remarque. On pouvait aussi écrire $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, $(P,Q) \in GL_n(\mathbb{K})$

et prendre $A_p = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^p} I_{n-r} \end{pmatrix} Q$.