Exercice 2.

1) $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $n \geq 1$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $|f_n(t)| = f_n(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$

et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc f_n est intégrable et I_n existe.

2) $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$, par croissance de l'intégrale

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante minorée donc convergente.

De plus.
$$\begin{cases} - \forall t \in \mathbb{R}^{*+} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = 0 \\ - \text{chaque } f_n \text{ est continue par morceaux.} \\ - \forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall t \in \mathbb{R}^{*+} \quad |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t) \text{ où} \\ \quad \varphi \text{ est continue et intégrable sur } \mathbb{R}^{*+}. \end{cases}$$

Par application du théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

3) $(I_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant donc d'après la règle de Leibniz $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^{n-1} I_n$ converge.

4) On intègre par parties $I_n = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t \times \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} dt$.

On remarque $t^2 = t^2 + 1 - 1$. et $\left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^{+\infty} = 0$. Il vient

$$I_n = 2n(I_n - I_{n+1}) \quad \text{soit} \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

5) On en déduit $I_{n+1} = \frac{(2n-1)}{(2n)} \cdots \frac{(1)}{(2\times 1)} I_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

puis
$$\boxed{I_n = \frac{(2(n-1))!}{((n-1)!\, 2^{(n-1)})^2} = \frac{n^2}{(2n)(2n-1)} 2^2 \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$
$$\boxed{I_n = \frac{2n}{2n-1} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$

6) En utilisant la deuxième écriture (ou la première appliquée à I_{n+1}) et la formule de Stirling on obtient $I_n \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n} n^{2n} 2\pi n} \times \frac{\pi}{2}$

$\boxed{I_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}}$ et $\forall n$ $I_n \geq 0$. D'après la règle de Riemann $\boxed{\sum I_n \text{ diverge}}$