Exercice 1. $u_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)(2n)!} a^n > 0$

D'après la formule de Stirling $u_n \sim \dfrac{(3n)^{3n} e^{-3n} \sqrt{6\pi n}\, a^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}} \sim \left(\dfrac{27a}{4}\right)^n \sqrt{\dfrac{3}{2\pi n}}$

Soit $\boxed{u_n \sim \left(\dfrac{27a}{4}\right)^n \sqrt{\dfrac{3}{2n}}}$

Si $\dfrac{27a}{4} < 1$ $\left(a < \dfrac{4}{27}\right)$ $u_n = \mathcal{O}\left(\left(\dfrac{27a}{4}\right)^n\right)$, $u_n \geq 0$, $\sum_{n\geq 0} \left(\dfrac{27a}{4}\right)^n$ converge

donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Si $\dfrac{27a}{4} \geq 1$ $\left(a \geq \dfrac{4}{27}\right)$ $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \mathcal{O}(u_n)$, $u_n \geq 0$, $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Remarque : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)} a \longrightarrow \dfrac{27a}{4}$.

La règle de d'Alembert permet de traité rapidement les cas $a < \dfrac{4}{27}$ et $a > \dfrac{4}{27}$

(mais pas le cas $a = \dfrac{4}{27}$).