ENS-X 2014 MP Maths A ~~Devoir~~

Préliminaires sur les formes quadratiques et les isométries.

1) $\langle a_1, \quad , a_n \rangle = q$

$\frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = a_1 x_1 y_1 + \dots + a_n x_n y_n = \tilde{q}(x,y)$

$\begin{cases} - \tilde{q} \text{ est clairement bilinéaire symétrique} \\ - \forall x \in \mathbb{K}^n \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) \end{cases}$

Donc q est une forme quadratique.

2) Notons $\Phi : q \to \tilde{q}$

- Par définition Φ est une application (linéaire) de l'ensemble de formes quadratique sur l'ensemble des formes symétriques
- Elle est injective on effet : $\forall x \ \tilde{q}(x,x) = \frac{1}{2}\left(q(2x) - 2q(x)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(4q(x) - 2q(x)\right)$

$\forall x \ \tilde{q}(x,x) = q(x)$

donc $\tilde{q} = \tilde{q}' \Rightarrow q = q'$

- Elle est surjective. Soit B une forme bilinéaire symétrique. Posons $q(x) = B(x,x)$ alors :

$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in V \ q(\lambda x) = B(\lambda x, \lambda x) = \lambda B(x, \lambda x) = \lambda^2 B(x,x) = \lambda^2 q(x)$

. $\forall (x,y) \in V^2 \ \tilde{q}(x,y) = \frac{1}{2}\left(B(x+y, x+y) - B(x,x) - B(y,y)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) - B(x,x) - B(y,y)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(B(x,y) + B(y,x)\right)$

$\tilde{q}(x,y) = B(x,y)$ (car B est symétrique)

Finalement $\tilde{q} = B$ est bilinéaire symétrique.

Donc q est une forme quadratique et $B = \Phi(q)$

3a) + Supposons $\det(\Phi_B(\tilde{q}))$ nul, alors il existe $X \neq 0$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que. $\Phi_B(\tilde{q})X = 0$

On a donc

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{q}(e_i, e_j) = 0$$

$$\forall i \quad \tilde{q}(e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = 0$$

$$\forall i \quad \tilde{q}(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j, e_i) = 0$$

puis par linéarité à droite

$$\forall w = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in V \qquad \tilde{q}(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j e_j}_{=v}, w) = 0$$

Or $v \neq 0$ et $\forall w \quad \tilde{q}(v, w) = 0$

Donc $\tilde{q}$ n'est pas non dégénérée.

+ pour la réciproque on suit le même plan, soit

X dans $\mathbb{K}^n$ tel que $\Phi_B(\tilde{q})X = 0$

En posant $v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ on obtient

$$\forall w \in V \qquad \tilde{q}(v, w) = 0$$

Or q est non dégénérée donc $v = 0$

donc $X = 0$

$$\Phi_B(\tilde{q})X = 0 \implies X = 0$$

donc $\Phi_B(\tilde{q})$ est inversible et $\det \Phi_B(\tilde{q}) \neq 0$

3b) $\tilde{q}(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{k,i} \delta_{k,j} = a_i \delta_{i,j}$

donc $\Phi_B(\tilde{q}) = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$

$\det \Phi_B(\tilde{q}) = \prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ donc $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$

4 a) $q \in Q(V)$ et q et q' sont isométriques

$\exists f$ isomorphisme linéaire tel que $q' \circ f = q$

Soit $q' = q \circ f^{-1}$ (en fait on vérifierait facilement que la relation "être isométriques" est une relation d'équivalence.

En utilisant la linéarité de f^{-1} on vérifie facilement

$\forall (v', w') \in V'^2 \quad \tilde{q}(v', w') = \tilde{q}(f^{-1}(v'), f^{-1}(w'))$

Puisque f est bijective, à v' fixé

$\forall w' \in V' \quad \tilde{q}(v', w') = 0 \iff \forall w \in V \ \tilde{q}(f^{-1}(v'), w) = 0$

$\iff f^{-1}(v') = 0 \quad$ (q non dégénérée)

$\forall w' \in V' \quad \tilde{q}(v', w') = 0 \iff v' = 0 \quad$ (f^{-1} isomorphisme)

q' est donc non dégénérée.

4.b). $\{x\}^{\perp} = \operatorname{Ker}(\underbrace{y \mapsto \tilde{q}(x,y)})$

application linéaire puisque $\tilde{q}$ est bilinéaire

$\{x\}^{\perp}$ est bien un sous-espace vectoriel.

$x \neq 0$ donc $\exists y \quad \tilde{q}(x,y) \neq 0$ puisque $\tilde{q}$ est non dégénérée.

Donc $\operatorname{Im}(\underbrace{y \mapsto \tilde{q}(x,y)}_{\varphi_x}) = \mathbb{K}$ et $\operatorname{rang}(\varphi_x) = 1$.

Le théorème du rang donne immédiatement $\dim \{x\}^{\perp} = n-1$.

4c). $\{x\}^{\perp}$ et $\mathbb{K}x$ seront supplémentaires ssi $\{x\}^{\perp} \cap \mathbb{K}x = \{0\}$

(car alors $\dim \{x\}^{\perp} \oplus \mathbb{K}x = n-1+1 = n = \dim V$.)

$\{x\}^{\perp} \cap \mathbb{K}x = \{0\} \iff x \notin \{x\}^{\perp} \iff \tilde{q}(x,x) \neq 0 \iff q(x) \neq 0$

$V = \{x\}^{\perp} \oplus \mathbb{K}x \iff q(x) \neq 0.$

5) Par définition $O(q) \subset GL(V)$.

1) Clairement $Id_V \in O(q)$

2) $\forall (f,g) \in O(q)^2 \quad q = q\circ f \quad q = q\circ g$.

donc $q\circ(f\circ g) = (q\circ f)\circ g = q\circ g = q$

et $f\circ g \in O(q)$

3) $\forall f \in O(q) \quad q\circ f = q$ donc $q = q\circ f^{-1}$

et $f^{-1} \in O(q)$

$O(q)$ est un sous-groupe de $GL(V)$

Supposons $q \cong q'$ alors il existe un isomorphisme f de V sur V' tel que $q'\circ f = q$

$$g \in O(q) \iff q'\circ f\circ g = q$$
$$\iff q'\circ f\circ g\circ f^{-1} = q\circ f^{-1} = q'$$
$$g \in O(q) \iff f\circ g\circ f^{-1} \in O(q')$$

On vérifie facilement que $\Theta_f : O(q) \to O(q')$, $g \mapsto f\circ g\circ f^{-1}$ est une bijection de réciproque $\Theta_{f^{-1}}$ et un morphisme de groupes ~~car~~ $\cancel{\Theta_f(g \circ h) = \Theta_f \circ \Theta_f}$

car $\Theta_f(g\circ h) = f\circ g\circ h\circ f^{-1} = (f\circ g\circ f^{-1})\circ(f\circ h\circ f^{-1})$

$$\Theta_f(g\circ h) = \Theta_f(g)\circ\Theta_f(h).$$

$O(q)$ et $O(q')$ sont donc isomorphes.