ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2014 FILIÈRE **MP**

# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet porte sur l'étude des formes quadratiques sur un corps de caractéristique nulle et des groupes d'isométries associés.

## Notations, Définitions

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désignera un corps de caractéristique nulle, c'est-à-dire un corps tel que, pour tout entier $n \neq 0$, on a $n \cdot 1 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ où 1 désigne l'unité de la loi multiplicative de $\mathbb{K}$, et $n \cdot 1 = 1 + \cdots + 1$.

Soit $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension *finie*. On rappelle les trois points suivants.

– Une *forme bilinéaire symétrique sur* $V$ est une application $b : V \times V \to \mathbb{K}$ telle que

$$b(x,y) = b(y,x) \text{ et } b(x + \lambda y, z) = b(x,z) + \lambda b(y,z)$$

pour tous $x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

– Une *forme quadratique sur* $V$ est une application $q : V \to \mathbb{K}$ telle que :
  i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in V$ ;
  ii) l'application $\widetilde{q} : V \times V \to \mathbb{K}$ définie par $(x,y) \mapsto \widetilde{q}(x,y) = \dfrac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big)$ est bilinéaire symétrique.

– Une forme quadratique est dite *non dégénérée* si, pour tout $v \in V - \{0\}$, il existe $w \in V$ tel que $\widetilde{q}(v,w) \neq 0$.

On notera $\mathcal{Q}(V)$ l'ensemble des formes quadratiques *non dégénérées* sur $V$.

Soient $V$ et $V'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

– Une *isométrie* entre deux formes quadratiques $q : V \to \mathbb{K}$ et $q' : V' \to \mathbb{K}$ est un isomorphisme linéaire $f : V \to V'$ tel que $q' \circ f = q$. On notera $q \cong q'$ si $q$ et $q'$ sont isométriques, c'est-à-dire s'il existe une isométrie entre $q$ et $q'$.

On notera $O(q) := \{\ f \in \mathrm{GL}(V) \mid q \circ f = q\}$ le sous ensemble de $\mathrm{GL}(V)$ des isométries $f : V \to V$ entre $q$ et elle-même. On appelle $O(q)$ *le groupe orthogonal de* $q$.

*Les deuxième et troisième parties du problème sont largement indépendantes.*

## Préliminaires sur les formes quadratiques et les isométries

Soit $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$. On note $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ la forme quadratique $q$ définie sur $\mathbb{K}^n$ par la formule

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 \,.$$

1. Démontrer que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ est bien une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$.

2. Démontrer que l'application $q \mapsto \widetilde{q}$ est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques sur $V$ sur les formes bilinéaires *symétriques* sur $V$.

3. Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $V$. On associe à toute forme bilinéaire symétrique $b$ sur $V$ une matrice symétrique $\Phi_{\mathcal{B}}(b) := \big(b(e_i, e_j)\big)_{i,j=1\dots n}$ appelée *matrice de* $b$ *dans la base* $\mathcal{B}$. On rappelle que $b \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}(b)$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur $V$ et celui des matrices symétriques carrées de taille $n$.
   (a) Démontrer qu'une forme quadratique $q$ sur $V$ est non dégénérée si et seulement si le déterminant $\det\big(\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})\big)$ est non nul.
   (b) Quelle est la matrice de $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ? En déduire que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$.

4. Soit $q \in \mathcal{Q}(V)$ une forme quadratique non dégénérée sur $V$.
   (a) Soit $V'$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $q'$ une forme quadratique sur $V'$. Démontrer que si $q$ et $q'$ sont isométriques, alors $q'$ est dans $\mathcal{Q}(V')$, c'est-à-dire non dégénérée.
   (b) Pour $x \neq 0$, on note $\{x\}^\perp := \{y \in V \mid \widetilde{q}(x, y) = 0\}$. Montrer que $\{x\}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $V$ de dimension $n - 1$.
   (c) A quelle condition sur $x$ le sous-espace $\{x\}^\perp$ est-il un supplémentaire de la droite $\mathbb{K}x$ dans $V$ ?

5. Soient $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $q' \in \mathcal{Q}(V')$ où $V'$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que $O(q)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ et que si $q \cong q'$, alors $O(q)$ et $O(q')$ sont deux groupes isomorphes.