Autour des sommes d'Euler

Centrale MP 2015 — Maths II

Un beau sujet de Centrale comme on les aime : sobre, relativement court, pas du tout répétitif, plongeant au cœur d'une théorie mathématique intéressante.

Il a cependant le gros *avantage de vous faire réviser* tous *les gros théorèmes d'analyse de l'année.*

PREMIÈRE PARTIE

I.A –

I.A.1) On peut utiliser un théorème du cours (sur les fonctions monotones), ou bien le faire « à la main » : pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui prouve que $\sum a_n$ converge *absolument*, donc converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n \text{ converge.}}$$

I.A.2) Puisque $a_k = \frac{1}{k} - \ln k + \ln(k-1)$ pour tout $k \geqslant 2$, on obtient après télescopage

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \mathrm{H}_n - 1 - \ln n$$

donc $\mathrm{H}_n = \ln n + 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k = \ln n + 1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k + \mathrm{o}(1)$ puisque la série $\sum a_n$ converge.

$$\boxed{\text{Le réel } \mathrm{A} := 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ est tel que } \mathrm{H}_n = \ln n + \mathrm{A} + \mathrm{o}(1).}$$

Enfin, puisque $\mathrm{A} + \mathrm{o}(1)$ est un $\mathrm{o}(\ln n)$:

$$\boxed{\mathrm{H}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n.}$$

I.B –

Séparons les cas :

- Si $r = 0$, alors la série $\sum \mathrm{H}_n$ diverge grossièrement.
- Si $r = 1$, on peut écrire
$$\frac{1}{n+1} = \mathrm{o}\left(\frac{\mathrm{H}_n}{n+1}\right)$$
et le membre de gauche est le terme général d'une série positive divergente ; par comparaison, la série $\sum \mathrm{H}_n/(n+1)$ diverge.
- Si $r > 1$, choisissons s tel que $r > s > 1$ et écrivons
$$\frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} = \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^{r-s}}\,\frac{1}{(n+1)^s} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^s}\right) \qquad r - s > 0.$$
Par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum 1/n^s$, la série $\sum \mathrm{H}_n/n^r$ converge.

On a donc prouvé que la série $\sum \mathrm{H}_n/(n+1)^r$ converge si et seulement si $r > 1$. D'ailleurs, puisque r est supposé entier,

$$\boxed{\sum \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} \text{ converge si et seulement si } r \geqslant 2.}$$

I.C –

I.C.1) Bon, là c'est du cours.

$$\boxed{\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \quad \text{(rayon de convergence R} = 1\text{).}}$$

$$\boxed{\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \quad \text{(rayon de convergence R} = 1\text{).}}$$

I.C.2) D'après le cours, le produit de Cauchy des deux séries ci-dessus a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Le problème pour calculer ce produit est qu'une des sommes commence à 1 au lieu de 0. Pour contourner la difficulté, je vous propose deux méthodes.

Première méthode

On factorise par t la somme délictueuse : pour tout $t \in \left]-1\,;1\right[$,

$$\frac{\ln(1-t)}{1-t} = -t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) = -t \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right) t^n = -t \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_{n+1}\, t^n$$

et il ne reste plus qu'à réintégrer le facteur t à sa place, puis effectuer un petit glissement d'indice pour trouver

$$\frac{\ln(1-t)}{1-t} = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{H}_n\, t^n.$$

Deuxième méthode

On convient de définir $b_k = 1/k$ si $k \geqslant 1$ et $b_0 = 0$. Alors pour tout $t \in \left]-1\,;1\right[$,

$$\frac{\ln(1-t)}{1-t} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k\, t^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n\, t^n$$

en convenant que $\mathrm{H}_0 = 0$.

$$\boxed{t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{1-t} \text{ est développable en série entière sur } \left]-1\,;1\right[\text{ et, pour tout } t \in \left]-1\,;1\right[\text{, on a } \frac{\ln(1-t)}{1-t} = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{H}_n\, t^n.}$$

I.D –

I.D.1) Soient $(p,q) \in \mathbf{N}^2$.

Remarque 1 **Attention**, l'entier p peut être égal à 0, ce qui fait que la fonction étudiée n'est pas forcément prolongeable par continuité en 0 ! En revanche, étudier la continuité sur $\left]0\,;1\right]$ est une obligation — sans quoi, vous perdez irrémédiablement des points !

- $t \mapsto t^p(\ln t)^q$ est continue sur $\left]0\,;1\right]$
- $\sqrt{t}\cdot t^p(\ln t)^q = t^{p+1/2}\,(\ln t)^q \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissance comparée, ce qui montre que $t^p\,(\ln t)^q = \underset{t\to 0^+}{\mathrm{o}}\left(1/\sqrt{t}\right)$.

Cela montre que $t \mapsto t^p\,(\ln t)^q$ est intégrable sur $\left]0\,;1\right]$ et donc

$$\boxed{\mathrm{I}_{p,q} \text{ existe pour tout } (p,q) \in \mathbf{N}^2.}$$

I.D.2) Les fonctions $t \mapsto t^{p+1}/p+1$ et $t \mapsto (\ln t)^q$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\varepsilon\,;1]$; on peut intégrer par parties sans discussion :

$$\mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q} = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\,(\ln t)^q\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{t^{p+1}}{p+1}\, q\, \frac{(\ln t)^{q-1}}{t}\,\mathrm{d}t$$

ce qui mène au résultat attendu :

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N} \quad \forall q \in \mathbf{N}^* \quad \forall \varepsilon \in \left]0\,;1\right[\qquad \mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q-1} - \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1}\,(\ln\varepsilon)^q.}$$

I.D.3) Puisque $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 1$, la question I.D.1 montre que $\mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q-1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \mathrm{I}_{p,q-1}$ et $\mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \mathrm{I}_{p,q}$. De plus, $\varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^q \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$ donc, à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$, la formule de la question I.D.2 donne

$$\boxed{\mathrm{I}_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}.}$$

I.D.4) En utilisant la valeur

$$\forall p \in \mathbf{N} \qquad \mathrm{I}_{p,0} = \int_0^1 t^p \,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1},$$

une récurrence sur q permet de montrer que

$$\boxed{\forall p, q \in \mathbf{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}.}$$

I.E –

On a pour tout $t \in \left]0\,;1\right[$,

$$(\ln t)^{r-1} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n (\ln t)^{r-1}.$$

Posons, pour tout $u_n : t \mapsto a_n\, t^n\, (\ln t)^{r-1}$.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est continue sur $\left]0\,;1\right[$ et, d'après la question I.D.1, u_n est intégrable sur $\left]0\,;1\right]$, donc sur $\left]0\,;1\right[$, car $r \geqslant 1$;
- la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\left]0\,;1\right[$ et a pour somme $t \mapsto (\ln t)^{r-1} f(t)$, qui est continue sur $\left]0\,;1\right[$;
- pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^1 \left|u_n(t)\right|, \mathrm{d}t = |a_n| \int_0^1 t^n \left|(\ln t)^{r-1}\right| \mathrm{d}t = (-1)^{r-1}\ |a_n|\ \mathrm{I}_{n,r-1} = (r-1)!\ \frac{|a_n|}{(n+1)^r}$$

  et, par hypothèse, la série $\sum |a_n|/(n+1)^r$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum \int_0^1 |u_n|$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme[1] s'applique et, sachant

$$\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = a_n\, \mathrm{I}_{n,r-1} = (-1)^{r-1}(r-1)! \frac{a_n}{(n+1)^r},$$

on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}.}$$

I.F –

I.F.1) Pour $r \geqslant 2$, on applique le résultat de la question I.E à $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{1-t}$ qui est développable en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$ (question I.C.3) avec comme coefficient de t^n dans ce développement, $a_n = -\mathrm{H}_n$.

Attention ! Pour pouvoir appliquer un résultat précédent, il faut justifier que les hypothèses requises sont vérifiées. Ici, c'est simple puisque $\sum |a_n|/(n+1)^r = \sum \mathrm{H}_n/(n+1)^r$ est alors convergente d'après la question I.B.

On obtient donc

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$$

ou encore

$$\boxed{\forall r \in \mathbf{N}^* \smallsetminus \{1\} \qquad \mathrm{S}_r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.}$$

I.F.2) Pour notre intégration par parties, il va y avoir pas mal de discussions, aussi va-t-on repasser par des segments.

[Fixons momentanément un segment $[c\,;d] \subset \left]0\,;1\right[$] ; alors, par intégration par parties,

$$\int_c^d \frac{\ln(1-t)}{1-t} (\ln t)^{r-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\big(\ln(1-t)\big)^2}{2} (\ln t)^{r-1}\right]_c^d + \frac{r-1}{2} \int_c^d \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2 (\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\big(\ln(1-c)\big)^2 (\ln c)^{r-1}}{2} - \frac{\big(\ln(1-d)\big)^2 (\ln d)^{r-1}}{2} + \frac{r-1}{2} \int_c^d \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2 (\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour étudier les termes de bord, on se rappelle que $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, ou encore et que $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. On obtient alors

- $\big(\ln(1-c)\big)^2 (\ln c)^{r-1} \underset{c\to 0^+}{\sim} c^2 (\ln c)^{r-1} \xrightarrow[c\to 0^+]{} 0,$
- $\big(\ln(1-d)\big)^2 (\ln d)^{r-1} \underset{d\to 1^-}{\sim} \big(\ln(1-d)\big)^2 (d-1)^{r-1} \xrightarrow[d\to 1^-]{} 0$ car $r-1>0$.

[1] À ne pas confondre avec le théorème de convergence dominée !

Puisque trois des termes de l'égalité admettent une limite quand $c \to 0$ et $d \to 1$, le quatrième aussi ; avec le résultat de la question **I.F.1**, on obtient

$$\boxed{\forall r \in \mathbf{N}^* \smallsetminus \{1\} \qquad \mathrm{S}_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2 (\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t.}$$

I.F.3) En particulier,

$$\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable (de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissant) $u = 1-t$ mène à

$$\boxed{\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u.}$$

Appliquons le résultat de la question I.E à $r = 3$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ qui est bien développable en série entière sur $]-1\,;1[$ avec, comme coefficient de t^n dans son développement, $a_n = 1$. La série $\sum |a_n|/(n+1)^3 = \sum 1/(n+1)^3$ est une série de Riemann convergente. On obtient alors

$$\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 2\,\zeta(3)$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{S}_2 = \zeta(3).}$$

DEUXIÈME PARTIE

II.A –

II.A.1) On vérifie tout :

- la fonction $\gamma : t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;
- $\gamma(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = 1/t^{1-x}$ avec $1-x<1$, donc γ est intégrable au voisinage de 0 ;
- $t^2\,t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ ce qui montre que $\gamma(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et donc que γ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Conclusion :

$$\boxed{t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \text{ est intégrable sur }]0\,;+\infty[.}$$

II.A.2) On effectue le changement de variable $u = t/\alpha$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant, dans l'intégrale définissant Γ :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\alpha u)^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha u}\alpha\,\mathrm{d}u = \alpha^x \int_0^{+\infty} u^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} u^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u \quad \text{existe et} \quad \int_0^{+\infty} u^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}.}$$

II.B –

II.B.1) Soient $x>0$ et $y>0$.

- $\varphi :\ t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0\,;1[$.

  Remarque 2 Attention, cette fonction diverge en 0 si $x<1$ et diverge en 1 si $y<1$! La continuité n'est donc assurée, dans le cas général, que sur l'intervalle ouvert $]0\,;1[$...

- $\varphi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = 1/t^{1-x}$ avec $1-x<1$ et
- $\varphi(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1} = 1/(1-t)^{1-y}$ avec $1-y<1$

ce qui montre que ψ est intégrable sur $]0\,;1[$ et donc

$$\boxed{\forall x, y > 0 \qquad \beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

II.B.2) Le changement de variable (de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissant) $u = 1-t$ donne

$$\boxed{\forall x, y > 0 \qquad \beta(x,y) = \beta(y,x).}$$

II.B.3) Par intégration par parties avec $u(t) = t^x$ et $v'(t) = (1-t)^{y-1}$, on a, puisque tous les termes existent,

$$\begin{aligned}\beta(x+1,y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^x(1-t)^y}{y}\right]_0^1 + \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{y}\int_0^1 \left(t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{y}\left[\beta(x,y) - \beta(x+1,y)\right]\end{aligned}$$

donc, après regroupement et simplification :

$$\boxed{\forall x, y > 0 \qquad \beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\,\beta(x,y).}$$

II.B.4) Les questions II.B.3 et II.B.2 montrent que

$$\beta(x+1,y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(y+1,x) = \frac{x}{x+y+1}\,\frac{y}{x+y}\beta(y,x) = \frac{x}{x+y+1}\,\frac{y}{x+y}\beta(x,y)$$

donc

$$\boxed{\forall x, y > 0 \qquad \beta(x+1,y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\,\beta(x,y).}$$

II.C –

II.C.1) Si la relation $(\mathcal{R})$ est vraie pour $x > 1$ et $y > 1$, on a, d'après la question II.B.4 et pour tous $x, y > 0$:

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\,\beta(x+1,y+1) \underset{\textit{par } (\mathcal{R})}{=} \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\,\frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} \\ &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\,\frac{x\,\Gamma(x)\cdot y\,\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\,\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } (\mathcal{R}) \text{ est vraie pour } x > 1 \text{ et } y > 1 \text{ alors elle est vérifiée pour tout } x > 0 \text{ et } y > 0.}$$

II.C.2) La fonction $\theta : u \mapsto \frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u}$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et strictement croissante ; le changement de variable $t = \theta(u)$ donne

$$\beta(x,y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}.$$

$$\boxed{\forall x, y > 0 \qquad \beta(x,y) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u.}$$

II.C.3) Puisque $x+y-1 > 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\,t^{x+y-1}$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ donc la primitive de cette fonction qui s'annule en 0 est $\mathrm{F}_{x,y} :\ t \mapsto \int_0^t \mathrm{e}^{-u}\,u^{x+y-1}\,\mathrm{d}u$. Cette fonction est croissante par positivité de l'intégrande. Notamment, pour tout $t \geqslant 0$ on a

$$\mathrm{F}_{x,y}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-u}\,u^{x+y-1}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,u^{x+y-1}\,\mathrm{d}u.$$

$$\boxed{\forall t \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}_{x,y}(t) \leqslant \Gamma(x+y).}$$

II.C.4) Posons $h : (a,u) \longmapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{F}_{x,y}\big((1+u)a\big)$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

- Pour tout $u \in [0\,;+\infty[$, la fonction $a \mapsto h(a,u)$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ car $\mathrm{F}_{x,y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$;
- Pour tout $a \in \mathbf{R}^+$, la fonction $u \mapsto h(a,u)$ est continue (par morceaux) sur $[0\,;+\infty[$ car $x-1 > 0$ et $\mathrm{F}_{x,y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$;
- Enfin, on a la domination

$$\forall a \in \mathbf{R}^+ \quad \forall u \in [0\,;+\infty[\qquad \big|h(a,u)\big| \leqslant \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y) =: \psi(u)$$

d'après la question II.C.3, et la fonction ψ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ d'après ce que l'on a fait en II.C.2.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet d'affirmer que

$$\boxed{\text{G est définie et continue sur } \mathbf{R}^+.}$$

II.C.5) On veut évidemment appliquer le théorème de convergence dominée (dans sa version continue $a \to +\infty$). On vérifie toutes les hypothèses :

- pour tout $u \in [0\,;+\infty[$, on a $g(a,u) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)$;
- $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)$ est continue (par morceaux) sur $[0\,;+\infty[$;
- on a la domination vue à la question précédente :

$$\forall a \in \mathbf{R}^+ \quad \forall u \in [0\,;+\infty[\qquad \big|h(a,u)\big| \leqslant \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y) =: \psi(u)$$

  où ψ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que

$$\mathrm{G}(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)\,\mathrm{d}u$$

ou encore, au vu des résultats de la question II.C.2 :

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} \mathrm{G}(a) = \Gamma(x+y)\,\beta(x,y).}$$

II.C.6) Avec les notations de la question II.C.4, et pour un segment $[c\,;d] \subset \,]0\,;+\infty[$:

- Pour tout $a \in \mathbf{R}^+$, la fonction $u \mapsto g(a,u)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0\,;+\infty[$;
- pour tout $u \geqslant 0$, $a \mapsto g(a,u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivée

$$\frac{\partial g}{\partial a}(a,u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,(1+u)\,\mathrm{F}'_{x,y}\big((1+u)a\big) = a^{x+y-1}\,\mathrm{e}^{-(1+u)a}\,u^{x-1}.$$

- pour tout $a \in \mathbf{R}^+$, la fonction $u \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a}(a,u)$ est continue (par morceaux) sur $[0\,;+\infty[$ (car $x-1>0$) ;
- on a la domination

$$\forall a \in [c\,;d] \quad \forall u \in [0\,;+\infty[\qquad \left|\frac{\partial g}{\partial a}(a,u)\right| \leqslant d^{x+y-1}\,\mathrm{e}^{-(1+u)c}\,u^{x-1} =: \psi(u)$$

  et ψ étant de la forme $u \mapsto \mathrm{C}^{\underline{\text{te}}}\cdot\mathrm{e}^{-cu}\,u^{x-1}$ avec $c>0$, elle est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ (c'est le résultat de la question II.A.2).

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre permet-il de conclure que

$$\boxed{\text{G est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [c\,;d].}$$

Ceci étant valable pour tout $[c\,;d] \subset \mathbf{R}_+^*$, et grâce au caractère local de la classe $\mathscr{C}^1$:

$$\boxed{\text{G est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}_+^*.}$$

II.C.7) De plus, la formule de dérivation donne, dans ce cas,

$$\forall a \in \mathbf{R}_+^* \qquad \mathrm{G}'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial a}(a,u)\,\mathrm{d}u = a^{x+y-1}\,\mathrm{e}^{-a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a\,u}\,u^{x-1}\,\mathrm{d}u$$

soit, avec le résultat de la question II.A.2 :

$$\boxed{\forall a \in \mathbf{R}_+^* \qquad \mathrm{G}'(a) = \Gamma(x)\,a^{y-1}\,\mathrm{e}^{-a}.}$$

II.C.8) On a donc

$$\forall a,b>0 \qquad \mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a) = \int_a^b \mathrm{G}'(t)\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)\int_a^b t^{y-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or

- $\mathrm{G}(a) \xrightarrow[b\to+\infty]{} \Gamma(x+y)\,\beta(x,y)$ d'après la question **II.C.5**,
- $\mathrm{G}(a) \xrightarrow[a'\to 0]{} \mathrm{G}(0)$ car G est continue en 0 d'après la question **II.C.4**

donc $\mathrm{G}(a) \xrightarrow[a\to 0]{} 0$ car $\mathrm{F}_{x,y}(0) = 0$.

D'autre part, $\int_a^b t^{y-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[(a,b)\to(0,+\infty)]{} \Gamma(y)$ donc, en passant à la limite, on obtient $\Gamma(x+y)\,\beta(x,y) - 0 = \Gamma(x)\,\Gamma(y)$. On peut conclure en faisant remarquer que $\Gamma(x+y) \neq 0$, ce qui permet de diviser :

$$\boxed{\forall x > 1 \quad \forall y > 1 \qquad \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.}$$

TROISIÈME PARTIE

Remarque 3 La fonction « digamma » se note habituellement « Ϝ » (c'est un « Gamma » avec une double barre, donc di-gamma...) À cause de sa trop grande ressemblance avec un « F », l'usage mathématique de cette lettre s'est plus ou moins perdu. C'est quand même ridicule de la noter ψ et de l'appeler « digamma ».

III.A –

Pour tout $x > 0$, on a

$$\ln\big(\Gamma(x+1)\big) - \ln\big(\Gamma(x)\big) = \ln\left[\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right] = \ln x$$

donc, en dérivant,

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}.}$$

III.B –

III.B.1) Selon les résultats admis dans la partie II, Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ et ne s'y annule pas donc, pour tout $x > 0$, la fonction

$$y \mapsto \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \beta(x,y)$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$. En particulier,

$$\boxed{\text{Pour tous } x, y > 0, \text{ la quantité } \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) \text{ est bien définie.}}$$

On a, pour tout $x, y > 0$:

$$\frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma'(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)\,\Gamma'(x+y)}{\big(\Gamma(x+y)\big)^2} = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\left[\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right]$$

donc

$$\boxed{\forall x, y > 0 \qquad \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)\big[\psi(y) - \psi(x+y)\big].}$$

III.B.2) Si $y < y'$, on a $t^x\,(1-t)^y > t^x\,(1-t)^{y'}$ pour tout $t \in\,]0\,;1[$, et donc $\beta(x,y) \geqslant \beta(x,y')$. Ainsi

$$\boxed{y \mapsto \beta(x,y) \text{ décroît sur } \mathbf{R}_+^*.}$$

III.B.3) En conséquence, pour tous $x, y > 0$, on a $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) \leqslant 0$, mais comme de plus $\beta(x,y) > 0$, la formule du 1, mène à $\psi(y) \leqslant \psi(x+y)$. Ainsi

$$\boxed{\psi \text{ est croissante sur } \mathbf{R}_+^*.}$$

III.C –

III.C.1) Pour tout $x > -1$ et $n \geqslant 1$, par télescopage,

$$\psi(x+n+1) - \psi(x+1) = \sum_{k=1}^{n}\big[\psi(x+k+1) - \psi(x+k)\big] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}$$

d'après la question III.A.

En particulier, pour $x = 0$, $\psi(n+1) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ donc, en soustrayant membre à membre,

$$\psi(n+1) - \psi(1) - \psi(x+n+1) + \psi(x+1) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right)$$

soit

$$\boxed{\forall x > -1 \quad \forall n \geqslant 2 \qquad \psi(x+1) - \psi(1) = \psi(x+n+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right).}$$

III.C.2) On a $0 < x+1 \leqslant p+1$ donc, par croissance de ψ,

$$0 \leqslant \psi(x+n+1) - \psi(n) \leqslant \psi(p+n+1) - \psi(n) = \sum_{k=n}^{n+p} \left[\psi(k+1) - \psi(k) \right] = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} = \mathrm{H}_{n+p} - \mathrm{H}_{n-1}.$$

De plus, puisque pour tout $k \in [\![n\,;n+p]\!]$ on a $1/k \leqslant 1/n$, on obtient

$$\boxed{0 \leqslant \psi(x+n+1) - \psi(n) \leqslant \mathrm{H}_{n+p} - \mathrm{H}_{n-1} \leqslant \frac{p+1}{n}.}$$

III.C.3) Procédons avec méthode :

- Pour $x > -1$, la série $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right)$ est convergente car $\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} = \frac{x}{k(k+x)} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$.
- De plus, $x > -1$ étant fixé et donc $p = \lfloor x \rfloor + 1$ également, on a $\frac{p+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc l'inégalité de la question III.C.2, donne $\psi(x+n+1) - \psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- En particulier, $\psi(n+1) - \psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Or l'égalité de la question III.C.1 donne

$$\psi(x+1) = \underbrace{\big(\psi(x+n+1) - \psi(n)\big)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} - \underbrace{\big(\psi(n+1) - \psi(n)\big)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} + \psi(1) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right)}_{\text{converge}}$$

On en conclut, en faisant tendre n vers l'infini, que

$$\boxed{\forall x > -1 \qquad \psi(x+1) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right).}$$

III.D –

III.D.1) Définissions, pour $n \geqslant 2$, la fonction $v_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}$. On a :

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, la fonction v_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1\,;+\infty[$, de dérivées $v_n^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k+1} k!}{(x+n)^{k+1}}$.
- Pour tout $x \geqslant -1$, on a l'équivalent $v_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$; ainsi, la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $[-1\,;+\infty[$;
- Pour $k \geqslant 1$, $\left\| v_n^{(k)} \right\|_\infty^{[-1\,;+\infty[} = \frac{k!}{(n-1)^{k+1}}$ donc, puisque $k+1 > 1$, la série $\sum v_n^{(k)}$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[-1\,;+\infty[$.

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique et

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } [-1\,;+\infty[.}$$

On a alors

$$\forall x \in [-1\,;+\infty[\quad \forall k \in \mathbf{N}^* \qquad g^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n^{(k)}(x).$$

Or $v_n^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{n^{k+1}}$ donc $g^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad g^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! \left[\zeta(k+1) - 1 \right].}$$

III.D.2) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en 0 s'écrit, pour $x \in [-1\,;+\infty[$,

$$g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n\, g^{(n+1)}(tx)\,\mathrm{d}t$$

ce qui nous donne la majoration entre $g(x)$ et la valeur de son polynôme de Taylor d'ordre n :

$$forall x \geqslant -1 \qquad \left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \left| g^{(n+1)}(tx) \right| \mathrm{d}t.$$

Or

$$\forall t\in[0\,;1]\quad \forall x\geqslant -1\qquad \left|g^{(n+1)}(tx)\right| = \left|(-1)^{n+2}(n+1)!\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{(p+tx)^{n+2}}\right| \leqslant (n+1)!\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{(p-1)^{n+2}}$$

(car, pour tout $p\geqslant 2$, $0<p-1\leqslant p+tx$) et, d'autre part, pour tout $p\geqslant 2$, $\frac{1}{(p-1)^{n+2}}\leqslant\frac{1}{(p-1)^2}$ par positivité de n. On obtient donc :

$$\forall x\geqslant -1\qquad \left|g(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n\,(n+1)!\,\zeta(2)\,\mathrm{d}t = |x|^{n+1}\zeta(2)\left[-(1-t)^{n+1}\right]_0^1$$

et donc

$$\boxed{\forall x\geqslant -1\qquad \left|g(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\right|\leq\zeta(2)\,|x|^{n+1}.}$$

Maintenant, lorsque $-1<x<1$, on a $\zeta(2)\,|x|^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ donc l'inégalité ci-dessus implique que

$$\forall x\in\,]-1\,;1[\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\xrightarrow[n\to\infty]{}g(x)$$

ce qui est une manière de dire que :

$$\boxed{g\text{ est développable en série entière sur }]-1\,;1[.}$$

III.D.3) Avec l'égalité vue à la question III.C.3, on obtient pour tout $x\in\,]-1\,;1[$:

$$\begin{aligned}\psi(x+1)&=\psi(1)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right)=\psi(1)+\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+g(x)\\&=\psi(1)+\frac{x}{x+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\\&=\psi(1)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,x^n+g(0)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\big(\zeta(n+1)-1\big)\,x^n\qquad\textit{d'après }\textbf{III.2.1}\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\forall x\in\,]-1\,;1[\qquad \psi(x+1)=\psi(1)+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\zeta(n+1)\,x^n.}$$

Remarque 4 Une autre démonstration de cette formule est possible à l'aide d'une famille sommable.

QUATRIÈME PARTIE

IV.A –

Comme on l'a signalé à la question III.B.1, pour tout $x>0$, la fonction $y\mapsto\beta(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Notamment

$$\boxed{\text{Pour tout } x>0,\qquad \mathrm{B}(x)=\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,1)\text{ existe.}}$$

Reprenons l'égalité de la question III.B.1 :

$$\forall(x,y)\in\left(\mathbf{R}_+^*\right)^2\qquad \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)=\beta(x,y)\big(\psi(y)-\psi(x+y)\big).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall x,y>0\qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,y)&=\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)\big(\psi(y)-\psi(x+y)\big)+\beta(x,y)\big(\psi'(y)-\psi'(x+y)\big)\\&=\beta(x,y)\big(\psi(y)-\psi(x+y)\big)^2+\beta(x,y)\big(\psi'(y)-\psi'(x+y)\big).\end{aligned}$$

Or $\beta(x,1)=\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = 1/x$:

$$\boxed{\forall x>0 \qquad x\,\mathrm{B}(x) = \big(\psi(1)-\psi(x+1)\big)^2 + \big(\psi'(1)-\psi'(x+1)\big).}$$

Puisque Γ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et ne s'y annule pas, ψ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$, donc

$$\boxed{\mathrm{B} \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}_+^*.}$$

IV.B –

IV.B.1) Fixons un réel $x>0$. Posons $h:(y,t)\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^{x-1}\exp\big[(y-1)\ln(1-t)\big]$.

- Pour tout $y>0$, la fonction $t\mapsto h(y,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0\,;1[$ d'après la question II.B.1;
- Pour tout $t>0$, $h(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\forall y>0 \quad \forall t\in\,]0\,;1[\qquad \frac{\partial h}{\partial y}(y,t) = \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t) = \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}.$$

- Pour tout $t\in\,]0\,;1[$, $y\mapsto \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t)$ et $y\mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t)$ sont continues sur $\mathbf{R}_+^*$.
- $t\mapsto \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t)$ est intégrable sur $]0\,;1[$ car
  - — pour tout $y>0$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t)$ est continue sur $]0\,;1[$,
  - — $\dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ avec $x>0$,
  - — $\dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t) = \underset{t\to1^-}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ car $(1-t)^{y-1/2}\ln(1-t) \xrightarrow[t\to1^-]{} 0$.
- Pour tout $y\in\mathbf{R}_+^*$, $t\mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0\,;1[$;
- Localisons maintenant la variable y. On choisit $c\in\,]0\,;1[\,1$, et on écrit la domination :

$$\forall y\in[c,+\infty[\quad \forall t\in\,]0\,;1[\qquad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t)\right| = \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leqslant \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}(1-t)^{c-1} =: \mathrm{H}(t)$$

  et
  - — la fonction H est continue sur $]0\,;1[$,
  - — $\mathrm{H}(t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x+1}$,
  - — $\mathrm{H}(t) = \underset{t\to1^-}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$,

  donc H intégrable sur $]0\,;1[$.

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique et $y\mapsto\beta(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[c\,;+\infty[$. On peut libérer c : la fonction précédente est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, et sa dérivée seconde est donnée par double dérivation sous l'intégrale. Notamment, en $y=1$:

$$\boxed{\forall x>0 \qquad \mathrm{B}(x) = \int_0^1 \ln^2(1-t)\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$$

IV.B.2) De la même façon, on obtiendrait

$$\boxed{\forall p\in\mathbf{N} \qquad \forall x>0 \qquad \mathrm{B}^{(p)}(x) = \int_0^1 \ln^2(1-t)\ln^p t\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$$

IV.B.3) Soit $r\geqslant 2$. D'après la question I.F.2, $\mathrm{S}_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!}\displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t$. Par ailleurs, pour tout $x>0$,

$$\mathrm{B}^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \big(\ln(1-t)\big)^2\,\big(\ln(t)\big)^{r-2}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

et (je vais un peu plus vite, on a déjà fait ça plusieurs fois)

- $\forall t\in\,]0\,;1[\qquad \big(\ln(1-t)\big)^2\,\big(\ln(t)\big)^{r-2}\,t^{x-1} \xrightarrow[x\to0^+]{} \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}$;
- $t\mapsto \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}$ est continue (par morceaux) sur $]0\,;1[$;

- on a la domination

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad \forall t \in \left]0\,;1\right[\qquad \left|\big(\ln(1-t)\big)^2 \big(\ln(t)\big)^{r-2} t^{x-1}\right| \leq \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2 |\ln t|^{r-2}}{t} =: \psi(t)$$

et ψ est intégrable sur $\left]0\,;1\right[$ d'après la question I.F.2.

En appliquant le théorème de convergence dominée (continu) pour $x \to 0^+$, on obtient

$$\mathrm{B}^{(r-2)}(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2 (\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{S}_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \lim_{x\to 0^+} \mathrm{B}^{(r-2)}(x).}$$

IV.B.4) Notamment, $\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \mathrm{B}(x)$ et la formule de la question IV.A, conjointement au développement trouvé au III.D.3 donne, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x) &= \frac{1}{x}\Big[\big(\psi(1)-\psi(x+1)\big)^2 + \big(\psi'(1)-\psi'(x+1)\big)\Big]\\ &= \frac{1}{x}\Big[\big(\psi(1)-\psi(1)-\zeta(2)x+\mathrm{o}(x)\big)^2 + \big(\zeta(2)-\zeta(2)+2\zeta(3)x+\mathrm{o}(x)\big)\Big] = 2\zeta(3) + \underset{x\to 0^+}{\mathrm{o}}(1)\end{aligned}$$

ce qui redonne bien

$$\boxed{\mathrm{S}_2 = \zeta(3).}$$

IV.C –

IV.C.1) La fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ donc

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \left]-1\,;+\infty\right[.}$$

La formule de Leibniz donne, pour tout $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$ et tout $n \geqslant 2$,

$$\varphi^{(n)}(x) = \big(\psi(x+1)-\psi(1)\big)\psi^{(n)}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\psi^{(k)}(x+1)\psi^{(n-k)}(x+1) + \psi^{(n)}(x+1)\big(\psi(x+1)-\psi(1)\big) - \psi^{(n+1)}(x+1)$$

donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad \varphi^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\psi^{(k)}(1)\psi^{(n-k)}(1) - \psi^{(n+1)}(1).}$$

IV.C.2) On a vu à la question IV.A que B est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et, à la question IV.B.3, que

$$\forall p \in \mathbf{N} \qquad \mathrm{B}^{(p)}(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 2(-1)^p\,p!\,\mathrm{S}_{p+2}.$$

Le théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$ montre alors que B se prolonge en une fonction $\widetilde{\mathrm{B}}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left[0\,;+\infty\right[$ et telle que

$$\forall p \in \mathbf{N} \qquad \widetilde{\mathrm{B}}^{(p)}(0) = 2\,(-1)^p\,p!\,\mathrm{S}_{p+2}.$$

La fonction $\widetilde{\mathrm{B}}$ admet donc un développement limité à l'ordre $r-2$ en 0 donné par la formule de Taylor-Young :

$$\widetilde{\mathrm{B}}(x) = \sum_{p=0}^{r-2} 2(-1)^p\,\mathrm{S}_{p+2}\,x^p + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{r-2}).$$

Mais pour tout $x > 0$, on a

$$\widetilde{\mathrm{B}}(x) = \mathrm{B}(x) = \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x}\left[\sum_{q=0}^{r-1}\frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!}x^q + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{r-1})\right] = \sum_{p=0}^{r-2}\frac{\varphi^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}x^p + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{r-2})$$

car $\varphi(0) = 0$. Par unicité du développement limité, on a donc

$$\forall p \in [\![0\,;r-2]\!] \qquad 2(-1)^p\,\mathrm{S}_{p+2} = \frac{\varphi^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}.$$

En particulier, pour tout $r \geqslant 2$, on a $2\mathrm{S}_r = (-1)^r \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}$ et, pour $r \geqslant 3$, la formule de la question IV.C.1 donne

$$2\mathrm{S}_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left[\sum_{k=1}^{r-2}\binom{r-1}{k}\psi^{(k)}(1)\,\psi^{(r-1-k)}(1) - \psi^{(r)}(1)\right].$$

D'autre part, le développement en série entière trouvé à la question **III.D.3** donne $\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}n!\,\zeta(n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On a donc

$$\begin{aligned}
2\mathrm{S}_r &= \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left[\sum_{k=1}^{r-2}\binom{r-1}{k}(-1)^{k+1}k!\,\zeta(k+1)\,(-1)^{r-k}(r-1-k)!\,\zeta(r-k) - (-1)^{r+1}r!\,\zeta(r+1)\right]\\
&= \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left[\sum_{k=1}^{r-2}\frac{(r-1)!}{k!(r-1-k)!}(-1)^{r+1}k!(r-1-k)!\,\zeta(k+1)\,\zeta(r-k) - (-1)^{r+1}r!\,\zeta(r+1)\right]
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{2\mathrm{S}_r = r\,\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2}\zeta(k+1)\,\zeta(r-k).}$$

♦ ♦
♦