Concours Centrale Supélec — MP 2016

Mathématiques 2

Première partie : suites et intégrales

I.A Etude d'une intégrale à paramètre.

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}}_{\varphi(x,t)} dt$

I.A.1) φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ sont définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{*}$

et $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ $\varphi(\cdot, t)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\cdot, t)$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\cdot, t)$ sont continue.

et $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\varphi(x, \cdot)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \cdot)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues par morceaux.

Finalement

* $\forall x \in \mathbb{R}^+ \; \forall t \; |\varphi(x,t)| \leq \frac{1-\cos t}{t^2} = \alpha_0(t)$

et α_0 est intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$ car $\lim_{t \to 0} \alpha_0(t) = \frac{1}{2}$

et $\alpha_0(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (avec $2>1$)

Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

* $\forall A > 0 \quad \forall x \in [A, +\infty[\quad \forall t \in \mathbb{R}^{*+}$

$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1-\cos t}{t} e^{-At} = \alpha_1(t) \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{(1-\cos t)}{t} e^{-xt}\right)$

$\lim_{t \to 0} \alpha_1(t) = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} t^2 \alpha_1(t) = 0$ donc $\alpha_1(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc α_1 est intégrable sur $]0, +\infty[$.

En particulier $\forall x \in [A, +\infty[$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable.

(2)

$+ \quad \underline{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-\cos t)\, e^{-At} \leq 2e^{-At} = \alpha_2(t)}$

pour tout (x,t) de $[A,+\infty[\times \mathbb{R}^{*+}$.

Or $\underline{\alpha_2}$ $\underline{\text{est intégrable}}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ $\left(\int_0^{+\infty} \alpha_2(t)\,dt = \frac{2}{A} \right)$

Les hypothèses du théorème de dérivation sont vérifiées
donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]A,+\infty[$ pour tout $A>0$ donc sur $]0,+\infty[$

De plus
$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad f'(x) &= -\int_0^{+\infty} \left(\frac{1-\cos t}{t}\right) e^{-xt}\,dt \\ f''(x) &= \int_0^{+\infty} (1-\cos t)\, e^{-xt}\,dt \end{aligned}}$$

I.A.2) $\quad \boxed{\forall t \in \mathbb{R}^{+} \quad 1 \geq \cos t \geq 1 - \frac{t^2}{2}}$

$\Big(\theta(t) = 1 - \frac{t^2}{2} - \cos t$
$\theta'(t) = -t + \sin t$
$\theta''(t) = -1 + \cos t$.

$\theta'' \leq 0$ donc θ' décroissante $\theta'(0)=0$ donc $\theta' \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$
$\theta(0) = 0$ donc $\theta \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+ \Big)$

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad |f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$.

donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t\, e^{-xt}\,dt = \frac{1}{2x^2} \int_0^{+\infty} u e^{-u}\,du \left(= \frac{1!}{2x^2} \right)$

donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0}$

I.A.3) $\underline{\forall x \in \mathbb{R}^{*+}}$ $\quad f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt - \int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt$

$f''(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\,dt \right)$

$f''(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i} \right)$ $\quad \Big($ car $\mathrm{Re}(x-i) > 0$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\,dt = \frac{1}{x-i} \Big)$

$\boxed{f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}}$

On en déduit

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{*+} \; f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad f'(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} + C$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\frac{x^2}{x^2+1} = \ln 1 = 0$, donc $\underline{C = 0}$

et $\boxed{\forall x > 0 \quad f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).}$

<u>I.A.4)</u> $\int \ln x \, dx = x\ln x - x$ (lire une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto x\ln x - x$)

De même

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = [x\ln(x^2+1)] - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx$$

$$= [x\ln(x^2+1)] - 2\int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)}\,dx$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x.$$

Donc $\exists D \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad f(x) = x\ln x - x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + x - \cancel{\frac{2}{2}}\arctan x + D$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad f(x) = x\ln x - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + D}$$

Or $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ et $x\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = x\ln x - \frac{x}{2}\left(\ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$x\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$, ~~donc li~~

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = 0}$$

On en déduit. $D = \frac{\pi}{2}$. Or f est continue en 0 et $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$

donc $f(0) = D$ et finalement

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad f(x) = x\ln x - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

I.A.5) On a donc prouvé $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Soit s dans $\mathbb{R}$. Si $s=0$ $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt = 0 = |s|$.

Si $s \neq 0$ $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos st}{t^2}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(|s|t)}{t^2}\,dt$ (cos est paire)

On effectue le changement de variable $u = |s|t$ $t = \frac{1}{|s|}u$.

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos st}{t^2}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{\frac{u^2}{|s|^2}}\frac{du}{|s|} = |s|\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\,du = |s|}$$

I.B Etude d'une suite d'intégrales

I.B.1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n : t \mapsto \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- $|f_n(t)| \leq \frac{2}{t^2}$ donc f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$

- $f_n(t) =_0 \frac{1-\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^n}{t^2} = \frac{1-\left(1-\frac{nt^2}{2}+o(t^2)\right)}{t^2} \underset{t\to 0}{=} \frac{n}{2}+o(1)$

donc f_n est intégrable sur $]0,1]$.

f_n est intégrable sur $\overline{\mathbb{R}}^{+*}$, donc u_n est définie.

$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ $f_{2n+2}(t) = \frac{1-(\cos^2 t)\cos^{2n} t}{t^2}$

Or $0 \leq \cos^2 t \leq 1$ donc $\cos^2 t \cos^{2n} t \leq \cos^{2n} t$
$0 \leq (\cos t)^{2n}$

$1-\cos^{2n+2} t \geqslant 1-\cos^{2n} t$

$\frac{1-\cos^{2n+2} t}{t^2} \geqslant \frac{1-\cos^{2n} t}{t^2}$

Puis par intégration : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad u_{2n+2} \geqslant u_{2n}}$

($(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ est croissante)

I.B.2)

$$\boxed{u_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}} \quad \text{(déjà vu !)}$$

$$u_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^2 t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{1+\cos 2t}{2}}{t^2}\,dt$$

$$\boxed{u_2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2t}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\pi}{2}\times|2|}_{\text{I.A.5)}} = \frac{\pi}{2}}$$

I.C) Calcul d'un équivalent de U_n.

I.C.1) Effectuons le changement de variable $\boxed{t = \sqrt{\frac{2u}{n}}}$

(Licite car $u \mapsto \sqrt{\frac{2u}{n}}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{*+}$ sur lui même)

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^2} \times \sqrt{\frac{2}{n}}\;\frac{1}{2}\,\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$\boxed{u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \cancel{v_n} \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}\,du = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\,v_n}$$

I.C.2) $\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[\quad \sqrt{\frac{2u}{n}} < \sqrt{2}$

Donc $\cos\sqrt{\frac{2u}{n}} \geq \cancel{1 - \frac{2u}{2n}} \; 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^2 \geq 1 - \frac{u}{n} \geq 0$

donc $\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n \geq \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{u}{n}\right) = -u.$

(car la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}^*$ si n est entier. (dérivée seconde positive) donc $\forall x \in \mathbb{R}$

(Mauvaise approche.)

I.C.2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall u \in]0,1] \quad \sqrt{\frac{2u}{n}} \in]0,\sqrt{2}] \subset]0,\frac{\pi}{2}[$

$\forall u \in]0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \geqslant \left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n > 0$

$\forall u \in]0,1] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right| = \left(1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right)$

D'après l'inégalité vue en I.A.2)

$\forall u \in]0,1] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \cos\sqrt{\frac{2u}{n}} \geqslant 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^2 = 1 - \frac{u}{n} \geqslant 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\varphi_n : x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ (dérivée seconde positive) donc $\forall x \in [-1,+\infty[\quad (1+x)^n \geqslant 1+nx$.

($\varphi_n(1+x) \geqslant \varphi_n(1) + \varphi_n'(1)((1+x)-1)$; graphe au dessus de la tangente)

Finalement

$\forall u \in]0,1] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n \geqslant \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1 - n\frac{u}{n} = 1-u$

et finalement

$\forall u \in]0,1] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n \leq 1-(1-u) = u$

I.C.3) On applique alors le théorème de convergence dominée. $v_n = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,du$.

$\forall u \in \mathbb{R}^{*+} \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}$

(car $\forall n \geqslant u+1 \quad f_n(u) = \frac{1-e^{n\ln\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}}}{u\sqrt{u}} = \frac{1-e^{n\ln\left(1-\frac{u}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}}{u\sqrt{u}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in [1,+\infty[\quad 0 \leq f_n(u) \leq \frac{2}{u\sqrt{u}}$

$\forall u \in]0,1] \quad 0 \leq f_n(u) \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$ d'après la question précédente.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall u \in \mathbb{R}^{*+} \quad |f_n(u)| \leq \psi(u)$

avec $\psi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ sur $]0, 1[$ $\quad \psi(u) = \dfrac{2}{u\sqrt{u}}$ sur $[1, +\infty[$.

ψ est continue par morceaux et intégrable car

$\psi(u) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1/2}}$ avec $\frac{1}{2} < 1$ $\quad \psi(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{u\sqrt{u}} = \dfrac{2}{u^{3/2}}$ $\quad \frac{3}{2} > 1$.

Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}}\, du = C_1.}$$

I. C. 4) On a donc $u_n \sim \dfrac{C_1}{2\sqrt{2}} \sqrt{n}$.

Pour calculer C_1 on intègre par parties

$$\boxed{C_1 = \left[-2\frac{1 - e^{-u}}{\sqrt{u}} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du}$$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{1 - e^{-u}}{\sqrt{u}} = 0 \qquad \lim_{u \to 0} \frac{1 - e^{-u}}{\sqrt{u}} = \lim_{u \to 0} \frac{u + o(u)}{\sqrt{u}} = 0$$

Donc $\boxed{C_1 = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = 2\sqrt{\pi}}$

et on a bien $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}}$.