ÉCOLE POLYTECHNIQUE OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1980

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4h)

⋆⋆⋆

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

$$\forall X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}, \forall Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, X + Y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda X = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On considère la partie $\mathscr{E}$ de $\mathcal{S}$ constituée des suites $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

1- a) Vérifier que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. Quelle est la dimension de $\mathscr{E}$?

b) Les deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$ définies par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $v_0 = 2$, $v_1 = 1$ constituent-elles une base de $\mathscr{E}$?

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les relations

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n,\ v_{n+1} = \frac{5}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n,$$

puis la relation $5u_n^2 - v_n^2 = 4(-1)^{n+1}$.

2- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer u_{2n+1} et v_{2n+1} en fonction de u_n et v_n à l'aide des formules

$$u_{2n} = u_n v_n, \quad v_{2n} = v_n^2 - 2(-1)^n \tag{1}$$

et des résultats précédents, et en déduire la validité des formules (1) pour tout entier $n \geqslant 0$.

II

L'objet de cette partie est de décrire pour les suites U et V une méthode de calcul numérique commodément exploitable sur ordinateur.

On rappelle que la représentation binaire de l'entier $n \geqslant 0$ est l'unique suite $(b_i(n))_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ de nombres $b_i(n) \in \{0, 1\}$ telle que $n = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i(n)2^{i-1}$.

1- a) Calculer en fonction de l'entier $n \geqslant 1$ le plus grand des indices i tels que $b_i(n) = 1$ (on utilisera la notation $\lfloor t \rfloor$ pour désigner le plus grand entier inférieur ou égal au réel t).

b) En notant désormais $\beta(n)$ le plus grand indice i en question, calculer $\beta(39)$.

2- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la suite finie $n_1, \ldots, n_{\beta(n)}$ définie par $n_1 = b_{\beta(n)}(n)$ et, pour tout entier $i \in [1, \beta(n)[$,

$$n_{i+1} = 2n_i + b_{\beta(n)-i}(n).$$

a) Vérifier que $n = n_{\beta(n)}$.

b) Pour tout entier $i \in [1, \beta(n)[$, exprimer $u_{n_{i+1}}$ et $v_{n_{i+1}}$ en fonction de u_{n_i} et v_{n_i}, en tenant compte de la valeur de $b_{\beta(n)-i}(n)$.

3- Employer la technique qui vient d'être décrite pour calculer numériquement u_{39} et v_{39} (on indiquera le détail des calculs utilisés).

Suite au dos...

III

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction S définie sur $\mathbb{N}$ par $S(0) = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, par

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} b_i(k) \right).$$

$S(n)$ est donc égal au nombre d'interventions du nombre 1 dans les représentations binaires des n entiers consécutifs 0, 1, …, $n-1$. On posera, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$s(k) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i(k).$$

1- a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ les relations

$$S(2n) = 2S(n) + n \text{ et } S(2n+1) = 2S(n) + n + s(n).$$

b) Calculer la valeur de $S(53)$.

c) Donner, pour tout entier $p \geqslant 1$, une expression explicite de $S(2^p)$.

2- Pour tous les entiers $i \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$B_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1} b_i(k).$$

a) Montrer que

$$B_1(n) = \frac{n}{2} + \varphi\left(\frac{n}{2}\right) \text{ et } B_2(n) = \frac{n}{2} + 2\varphi\left(\frac{n}{4}\right)$$

où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et de période 1, telle que $\varphi(\xi) = -\xi$ pour tout $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b) Tracer les graphes des fonctions $x \mapsto \frac{x}{2} + \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ et $x \mapsto \frac{x}{2} + 2\varphi\left(\frac{x}{4}\right)$.

c) Donner au moyen de la fonction φ une expression de $B_i(n)$.

d) En déduire l'égalité

$$S(n) = \frac{n\beta(n)}{2} + 2^{\beta(n)} \sum_{j=1}^{\beta(n)} \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{n}{2^{\beta(n)}} 2^{j-1}\right).$$

3- Pour tout réel x, on pose

$$f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \varphi\left(2^{j-1} x\right).$$

a) En notant $\log_2 x$ le logarithme de base 2 du réel $x > 0$, exprimer pour tout entier $n \geqslant 1$ la différence $\frac{S(n)}{n} - \frac{1}{2} \log_2 n$ à l'aide de f et de θ, où $\theta = \beta(n) - \log_2 n$.

b) En déduire un infiniment grand simple équivalent à $S(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4- Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \frac{x}{2} \log_2 x$.

a) Quel est le sens de la concavité du graphe de la fonction g ?

b) Comparer, pour tout entier $n \geqslant 1$, les positions par rapport à 0 des différences $g(n) - S(n)$ et $g(2n) - S(2n)$.

c) On suppose qu'il existe des entiers impairs $2n+1$ strictement plus grands que 1 tels que $S(2n+1) \geqslant g(2n+1)$ et on note $2m+1$ le plus petit d'entre eux. Trouver, sous ces hypothèses, les signes de $g(2m) - S(2m)$ et de $g(2m+2) - S(2m+2)$ et en déduire, à l'aide de valeurs convenables de la dérivée g' de g, une minoration et une majoration de $s(m)$. L'hypothèse initiale de cette question est-elle justifiée ?

d) Déterminer le signe de la fonction $g - S$ sur l'ensemble des entiers strictement positifs, et les entiers pour lesquels cette fonction est nulle.

5- a) Établir la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point x de $\mathbb{R}$ (on pourra étudier successivement les cas $x = 0$, $x = \frac{r}{2^p}$ avec $r \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ et enfin x réel quelconque).