I

I.1.a) Si x et y vérifient pour tout n $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ et $y_{n+2} = z_{n+1} + z_n$, alors pour tout λ et μ dans $\mathbb{R}$ et tout n : $\lambda x_{n+2} + \mu y_{n+2} = \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1} + \lambda x_n + \mu y_n$, donc $\lambda x + \mu y$ est dans $\mathcal{E}$. De plus la suite nulle est dans $\mathcal{E}$. $\underline{\mathcal{E} \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathcal{S}}$.
Tout élément x de $\mathcal{E}$ est déterminé de manière unique par les valeurs x_0 et x_1. L'application $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ qui à x associe (x_0, x_1) est donc bijective. Elle est clairement linéaire, c'est donc un isomorphisme et $\underline{\dim \mathcal{E} = 2.}$

I.1.b) La famille $(\varphi(U), \varphi(V)) = ((0,1),(2,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ (déterminant égal à -2), c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$; φ est un isomorphisme, donc (U, V) est une base de $\mathcal{E}$.

I.1.c) Soit $U' = (u_{n+1})_{n\geq 0}$ et $V' = (v_{n+1})_{n\geq 0}$. On vérifie facilement que U' et V' sont des éléments de $\mathcal{E}$. De plus $u'_0 = u_1 = 1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}v_0$ et $u'_1 = u_2 = 1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}v_1$. Donc $\varphi(U') = \varphi(\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V)$ et puisque φ est bijectif : $U' = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V$, soit $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n$ pour tout entier n. L'autre relation se justifie de la même manière.
Un calcul élémentaire donne, à partir de ces relations : $\underline{5u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 = -(5u_n^2 - v_n^2)}$. Puisque $5u_0^2 - v_0^2 = -4$, il en résulte bien par récurrence que $\underline{5u_n^2 - v_n^2 = 4(-1)^{n+1}}$.

I.2) En supposant (1) vraie à l'ordre n et en utilisant les formules de la question précédente on obtient

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2}u_{2n} + \frac{1}{2}v_{2n} = \frac{1}{2}u_n v_n + \frac{1}{2}v_{2n}^2 + (-1)^{n+1} = \frac{1}{2}u_n v_n + \frac{1}{2}v_{2n}^2 + \frac{1}{4}(5u_n^2 - v_n^2)$$
$$\underline{u_{2n+1} = \frac{5}{4}u_n^2 + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{1}{2}u_n v_n.}$$

Un calcul similaire conduit à
$$\underline{v_{2n+1} = \frac{5}{4}u_n^2 + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{5}{2}u_n v_n.}$$

On utilise maintenant $u_{2n+2} = \frac{1}{2}u_{2n+1} + \frac{1}{2}v_{2n+1}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
u_{2n+2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}u_n^2 + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{1}{2}u_n v_n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}u_n^2 + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{5}{2}u_n v_n\right) \\
&= \frac{5}{4}u_n^2 + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{2}u_n v_n \\
&= \left(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n\right)\left(\frac{5}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n\right) \\
\underline{u_{2n+2}} &= \underline{u_{n+1}v_{n+1}}.
\end{aligned}$$

On établirait par le même procédé
$$\underline{v_{2n+2} = v_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1}}.$$

Ceci prouve que si les relations (1) sont vraies à l'ordre n alors elles sont vraies à l'ordre $n+1$. Or elles sont vraies à l'ordre 0. Donc elles sont vraies pour tout entier n.

II

II.1.a) Soit $n = \sum_{i=1}^{d} b_i(n)2^{i-1}$, avec $b_d(n) = 1$ (d est donc l'entier que nous recherchons). On a

$$2^{d-1} \leq n \leq \sum_{i=1}^{d} 2^{i-1} = 2^d - 1 < 2^d.$$

En prenant le logarithme

$$d - 1 \leq \frac{\ln n}{\ln 2} < d$$

donc $d - 1 = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$, puis $\underline{d = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor + 1}$.

II.1.b) $2^5 = 32 \leq 39 < 64 = 2^6$, donc $\underline{\beta(39) = 5 + 1 = 6}$.

II.2.a) On vérifie par récurrence que

$$n_i = \sum_{k=\beta(n)+1-i}^{\beta(n)} b_k(n)2^{k-1+\beta(n)-i}.$$

En particulier

$$n_{\beta(n)} = \sum_{k=1}^{\beta(n)} b_k(n)2^{k-1} = n.$$

II.2.b) D'après les résultats de la première partie on aura :

— Si $b_{\beta(n)-i} = 0$:

$$u_{n_{i+1}} = u_{n_i} v_{n_i} \qquad v_{n_{i+1}} = v_{n_i}^2 - 2(-1)^{n_i}.$$

— Si $b_{\beta(n)-i} = 1$:

$$\underline{u_{n_{i+1}} = \frac{1}{2}\left(u_{n_i} v_{n_i} + v_{n_i}^2 - 2(-1)^{n_i}\right)} \qquad \underline{v_{n_{i+1}} = \frac{1}{2}\left(5u_{n_i} v_{n_i} + v_{n_i}^2 - 2(-1)^{n_i}\right)}.$$

II.3) $39 = 32 + 4 + 2 + 1$, $\beta(39) = 6$, $(b_6, b_5, b_4, b_3, b_2, b_1) = (1, 0, 0, 1, 1, 1)$.

— $n_1 = b_6 = 1$

$$u_1 = 1 \quad v_1 = 1.$$

— $n_2 = 2n_1 + b_5 = 2 + 0 = 2$

$$u_2 = u_1 v_1 = 1 \quad v_2 = v_1^2 - 2(-1)^1 = 3.$$

— $n_3 = 2n_2 + b_4 = 2 + 0 = 4$

$$u_4 = u_2 v_2 = 3 \quad v_4 = v_2^2 - 2(-1)^2 = 7.$$

— $n_4 = 2n_3 + b_3 = 2 + 1 = 9$

$$u_9 = \frac{1}{2}\left(u_4 v_4 + v_4^2 - 2(-1)^4\right) = 34 \quad v_9 = \frac{1}{2}\left(5u_4 v_4 + v_4^2 - 2(-1)^4\right) = 76.$$

— $n_5 = 2n_4 + b_2 = 2 + 1 = 19$

$$u_{19} = \frac{1}{2}\left(u_9 v_9 + v_9^2 - 2(-1)^9\right) = 4181 \quad v_{19} = \frac{1}{2}\left(5u_9 v_9 + v_9^2 - 2(-1)^9\right) = 9349.$$

— $n_6 = 2n_5 + b_1 = 2 + 1 = 39$

$$u_{39} = \frac{1}{2}\left(u_{19} v_{19} + v_{19}^2 - 2(-1)^{19}\right) = 63245986 \quad v_{19} = \frac{1}{2}\left(5u_{19} v_{19} + v_{19}^2 - 2(-1)^{19}\right) = 141422324.$$

III.1.a) Notons, pour $n \geq 0$, $E_n = [0, n-1]$ ($E_0 = \emptyset$). Alors $S(n) = \sum_{k \in E_n} s(k)$. Or, pour $n \geq 0$

$$E_{2n} = \{2k, k \in E_n\} \cup E_{2n} = \{2k+1, k \in E_n\} \text{ et } E_{2n+1} = E_{2n} \cup \{2n\}.$$

Mais $S(n) = \sum_{k \in E_n} s(k)$ et $s(2k) = s(k)$ et $s(2k+1) = s(k) + 1$. Les relation démandées découlent de cela (car E_n est de cardinal n).

III.1.b) $53 = 32 + 16 + 4 + 1$ s'écrit 110101 en base 2.

$$\begin{array}{rcl} S(53) & = & 2S(26) + 26 + s(26) \\ S(26) & = & 2S(13) + 13 \\ S(13) & = & 2S(6) + 6 + s(6) \\ S(6) & = & 2S(3) + 3 \\ S(3) & = & 2S(1) + 1 + s(1) \end{array}$$

$s(1) = 1$, $s(6) = s(4+2) = 2$, $s(26) = s(16+8+2) = 3$ et $S(1) = 0$. Donc, en remontant, on obtient : $S(3) = 2$, $S(6) = 7$, $S(13) = 22$, $S(26) = 57$ et finalement : $\underline{S(53) = 143}$.

III.1.c) Clairement $S(2^1) = 1$ et $S(2^{p+1}) = 2S(2^p) + 2^p$. Donc $S(2^2) = 4$, $S(2^3) = 12$, puis par récurrence $\underline{S(2^p) = p2^{p-1}}$.

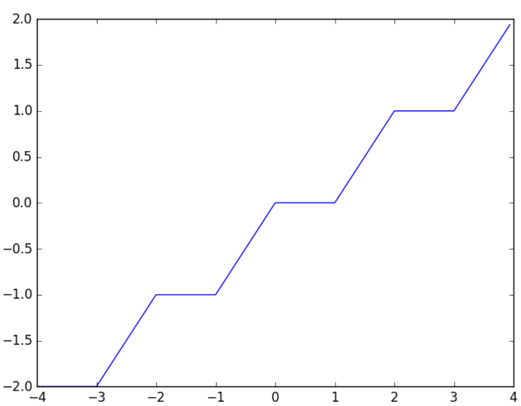
III.2.a) $B_1(0) = 0$, $B_1(2p+1) = B_1(2p)$ car $b_1(2p) = 0$, $B_1(2p+2) = B_1(2p+1) + 1$. On en déduit par récurrence, que pour tout p $B_1(2p) = p$, $B_1(2p+1) = p$, or $\varphi(p) = 0$ et $\varphi(p + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$. dans tout les cas on a bien

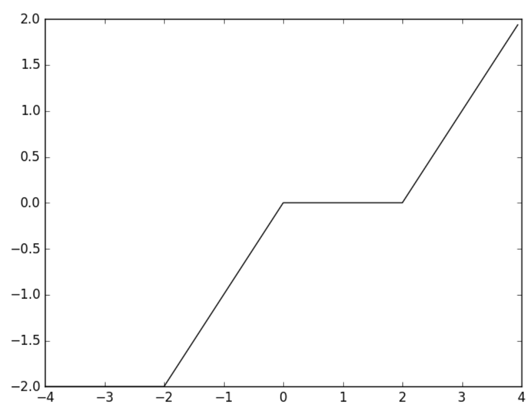
$$\forall n \geq 1 \quad B_1(n) = \frac{n}{2} + \phi(\frac{n}{2}).$$

Pour B_2 on applique la même technique en remarquant $B_2(4p+1) = B_2(4p)$, $B_2(4p+2) = B_2(4p+1) + 1$, $B_2(4p+3) = B_2(4p+2) + 1$ et $B_2(4p+4) = B_2(4p+3)$. La fonction $n \mapsto \frac{n}{2} + 2\varphi(\frac{n}{4})$ vérifiant les mêmes relation on en déduit que leur différence est constante, or elle est nulle pour $n = 0$, donc identiquement nulle.

$$\forall n \geq 1 \quad B_2(n) = \frac{n}{2} + 2\phi(\frac{n}{4}).$$

III.2.b) A gauche B_1, à droite B_2.





III.2.c) On a
$$\forall n \geq 1 \quad B_i(n) = \frac{n}{2} + 2^{i-1}\phi(\frac{n}{2^i}).$$
Ce résultat se justifie en remarquant que les deux membres de cette égalité vérifient $B_i(p2^i+k) = B_i(p2^i+k-1)$ pour $1 \leq k < 2^{i-1}$, $B_i(p2^i+k) = B_i(p2^i+k-1)+1$, pour $2^{i-1} \leq k < 2^i$ et $B_i(p2^i+2^i) = B_i(p2^i+2^i-1)$. Leur différence est donc constante, nulle en 1.

III.2.d) $S(n) = \sum_{j=1}^{\beta(n)} B_i(n)$ car $b_i(k) = 0$ pour $k \leq n-1$ et $i > \beta(n)$. Il en résulte
$$S(n) = \frac{n\beta(n)}{2} + \sum_{j=1}^{\beta(n)} 2^{j-1}\varphi(\frac{n}{2^j}).$$
En effectuant le changement d'indice de sommation $j \mapsto \beta(n) - j + 1$ on obtient la formule demandée.

III.3.a) Remarquons que, pour $j > \beta(n)$, $\frac{n}{2^{\beta(n)}}2^{j-1}$ est un entier. Donc, par définition de φ, $\varphi(\frac{n}{2^{\beta(n)}}2^{j-1}) = 0$ et par conséquent
$$\frac{S(n)}{n} = \frac{\beta(n)}{2} + \frac{2^{\beta(n)}}{n}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^j}\varphi(\frac{n}{2^{\beta(n)}}2^{j-1}).$$
En remarquant $\frac{2^{\beta(n)}}{n} = 2^\theta$, on peut donc écrire
$$\frac{S(n)}{n} - \frac{1}{2}\log_2(n) = \frac{\theta}{2} + 2^\theta f(2^{-\theta}).$$

III.3.b) θ est une fonction bornée de n ($0 \leq \theta \leq 1$). On a $-\frac{1}{2} \leq \phi \leq 0$, donc $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{j+1}} \leq f \leq 0$. Finalement
$$\frac{S(n)}{n} = \frac{1}{2}\log_2(n) + \mathcal{O}(1),$$
et en particulier
$$S(n) \sim \frac{1}{2}n\log_2(n).$$

III.4.a) g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$. De plus
$$\forall x > 0 \quad g''(x) = \frac{1}{2\ln 2}\frac{1}{x} > 0.$$
Donc g est convexe (la concavité de son graphe est tournée vers le haut).

III.4.b) $S(n) - g(n) = n \times \left(\frac{\theta(n)}{2} + 2^{\theta(n)} f(2^{-\theta(n)})\right)$. Or $\theta(2n) = \theta(n)$. Donc $g(2n) - S(2n) = 2(g(n) - S(n))$. En particulier $g(2n) - S(2n)$ et $g(n) - S(n)$ sont du même signe, au sens strict.

III.4.c) On a donc $g(2m+1) - S(2m+1) <= 0$ et $g(2k+1) - S(2k+1) > 0$ si $1 \leq k < m$.
Remarquons que $g(3) - S(3) > 0$, donc $m \geq 2$ et soit $2m$ soit $2m+2$ n'est pas une puissance de 2. Un quelconque de ces deux nombres, x, s'écrit $2^i(2k+1)$, avec $k < 1$. D'après le *a*), $g(x) - S(x)$ est du signe de $g(2k+1) - S(2k+1)$, et est donc strictement positif si $k \geq 1$, nul si $k = 0$. Ces deux nombres ($2m$ et $2m+2$ ne pouvant tous deux être une puissance de deux, pour au moins un des deux $k > 0$.
En conclusion $g(2m) - S(2m) \geq 0$ et $g(2m+2) - S(2m+2) \geq 0$, l'une de ces deux inégalité étant stricte.
D'autre part $S(2m) = 2S(m) + m$ et $S(2m+2) = 2S(m+1) + m + 1 = 2S(m) + 2s(m) + m + 1$ et $S(2m+1) = 2S(m) + m + s(m)$.

On en déduit $S(2m+2)+S(2m)-2S(2m+1)=2$. Cependant

$$S(2m+2)+S(2m)-2S(2m+1) = \\ (S(2m+2)-g(2m+2))+(S(2m)-g(2m))-2*(S(2m+1)-g(2m+1))+ \\ (g(2m+2)+g(2m)-2g(2m+1)).$$

Or $(S(2m+2)-g(2m+2))+(S(2m)-g(2m))-2*(S(2m+1)-g(2m+1))>0$. On en déduit

$$(*) \qquad g(2m+2)+g(2m)-2g(2m+1)>2.$$

Mais

$$\begin{array}{rcl} g(2m+2)+g(2m)-2g(2m+1) & = & g(2m+2)-g(2m+1)+g(2m+1)-g(m) \\ & = & (2m+2-(2m+1))g'(c)-(2m+1-2m)g'(d) \\ & & (c,d)\in[2m,2m+2]^2, c>d \\ & = & g'(c)-g'(d) \\ & = & (c-d)g''(e) \\ & \leq & 2\dfrac{1}{2\ln(2)\times 4m} \\ g(2m+2)+g(2m)-2g(2m+1) & \leq & 2. \end{array}$$

C'est en contradiction avec $(*)$.

III.4.d) On a donc $g(2m+1)-S(2m+1)>0$ pour tout m au moins égal 1 et $g(1)-S(1)=0$.
En utilisant la résultat déjà établi : $g(2^i(2k+1))-S(2^i(2k+1))$ est du même signe que $g((2k+1))-S((2k+1))$, on en déduit que $g(n)-S(n)\geq 0$ pour tout entier non nul, l'égalité étant réalisée si et seulement si n est une puissance de 2.

III.5.a) Notons

$$\begin{array}{cccc} u_j & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{2^j}\phi(2^{j-1}x) \end{array}$$

- ϕ est continue donc chaque u_j est continue,
- $\|u_j\|_\infty = \frac{1}{2^{j+1}}$,
- $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n+1}}$ converge (série géométrique), donc $\sum_{n\geq 1} u_j$ converge normalement et par conséquent uniformément sur $\mathbb{R}$.

Il résulte de ces trois points que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

III.5.b) Montrons directement que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. Pour cela nous arons besoin du lemme suivant :
Lemme : Si la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable en x_0 alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0), x\leq x_0\leq y, x\neq y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x_0).$$

Démontrons ce lemme.

$$f(x) = f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\circ(x-x_0), \\ f(y) = f(x_0)+(y-x_0)f'(x_0)+\circ(y-x_0).$$

En soustrayant la première ligne à la deuxième on obtient

$$f(y)-f(x) = (y-x)f'(x_0)+\circ(x-x_0)+\circ(y-x_0).$$

Or $|x-x_0| = x_0 - x`y - x = |y-x|$ et de même $|y-x_0| \leq |y-x|$, par conséquent

$$\circ(x-x_0) + \circ(y-x_0) = \circ(y-x)$$

puis

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x_0) + \circ(1),$$

qui conduit immédiatement au résultat annoncé.

Revenons au résultat qui nous préoccupe.
Soit x_0 dans $\mathbb{R}$. Il existe un entier k, unique, tel que $\frac{k}{2^p} \leq x \leq \frac{k+1}{2^p}$.
On a

$$f(\frac{k}{2^p}) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{2^j}\varphi(\frac{k}{2^{p+1-j}}) \text{ et } f(\frac{k+1}{2^p}) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{2^j}\varphi(\frac{k+1}{2^{p+1-j}}).$$

Remarquons que pour $1 \leq j \leq p$ les nombres $\frac{k}{2^{p+1-j}}$ et $\frac{k+1}{2^{p+1-j}}$ sont dans un même intervalle $[\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}]$, $m \in \mathbb{Z}$ ($m = \lfloor \frac{k}{2^{p-j}} \rfloor$).
Or sur un tel intervalle φ est affine, de pente égale à 1 ou -1.
On en déduit

$$f(\frac{k+1}{2^p}) - f(\frac{k}{2^p}) = \sum_{j=1}^{p} \pm\frac{1}{2^j}\frac{1}{2^{p+1-j}}.$$

Pour tout p entier on a donc :

$$\frac{f(\frac{k+1}{2^p}) - f(\frac{k}{2^p})}{\frac{k+1}{2^p} - \frac{k}{2^p}} = \frac{1}{2}A_p$$

où $A_p = \sum_{j=1}^{p} \pm 1$ est un entier relatif qui a même parité que p et ne possède donc pas de limite lorsque p tend vers $+\infty$.
Il découle donc de la contraposée du résultat du lemme que f n'est pas dérivable en x_0.

*****

En bonus : l'allure du graphe de f, sur $[0, 1]$, sachant que f est 1-périodique.