MP*2-2018/2019 Correction du D.T.L. 01 (Sujet X 2008)

Première partie

1) Une application injectice de $\{1, \ldots, n\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$, est aussi surjective (car son image doit être de cardinal n), donc bijective.
De même, une application surjective de $\{1, \ldots, n\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$, est aussi injective (sinon son image serait de cardinal strictement inférieur à n), donc bijective.
Par conséquent :

$$\underline{j_{n,n} = s_{n,n} = n!.} \quad \text{(nombre de permutations de } \{1, \ldots, n\})$$

2) L'image d'une injection de $\{1, \ldots, k\}$ est une partie à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$, et une telle partie A étant donnée, il y a autant d'injections de $\{1, \ldots, k\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$ dont l'image est A que de permutations des k éléments de A. Donc

$$\underline{j_{k,n} = \binom{n}{k} k!\,,}$$

car $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

3.a) Reprenons le principe de dénombrement de la question précédente en l'appliquant aux applications de $\{1, \ldots, k\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$.
Une telle application réalise une surjection sur une partie A de $\{1, \ldots, n\}$ à q éléments ($q \geq 1$).
Réciproquement, une telle partie A étant donnée (elle sont au nombre de $p_{q,n}$, il y a $s_{k,q}$ applications dont l'image est A.
Puisqu'il y a au total n^k applications de $\{1, \ldots, k\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$, on obtient bien :

$$\underline{n^k = \sum_{q=1}^{n} s_{k,q} p_{q,n}.}$$

3.b) L'ensemble des égalités précédentes , pour $1 \leq k, n \leq r$ s'interprète immédiatement comme un produit matriciel

$$\underline{A(r) = S(r)P(r).}$$

En passant au déterminant il vient

$$\det A(r) = (\det S(r))(\det P(r)).$$

Or $p_{k,n} = 0$ si $k > n$, donc $P(r)$ est triangulaire supérieure et son détermininat est le produit de ses coefficients diagonaux.
De même $s_{k,n} = 0$ si $k < n$ et $S(r)$ est triangulaire inférieure.
En conclusion :

$$\underline{\det A(r) = \prod_{k=1}^{r} s_{k,k} \prod_{k=1}^{r} p_{k,k} = \prod_{k=1}^{r} k!\,.}$$

Deuxième partie

4.a) La formule du binôme donne $(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$. On en déduit :

$$\underline{T_{k,n} = \binom{n}{k} \text{ si } 0 \leq k \leq n, \quad T_{k,n} = 0 \text{ si } k > n\,.}$$

La matrice de T est triangulaire supérieure.

4.b) Soit $U : P \mapsto P(X-1)$. On a $U \circ T = T \circ U = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ donc T est bijectif et $T^{-1} = U$. Comme dans la question précédente, la formule du binôme donne :

$$\underline{U_{k,n} = (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \text{ si } 0 \leq k \leq n, \quad U_{k,n} = 0 \text{ si } k > n\,.}$$

4.c) Les relations

$$a_n = \sum_{q=0,\ldots,n} b_q \binom{n}{q}, \qquad 0 \leq n \leq d$$

se résument matriciellement en

$$(a_0, \ldots, a_d) = (b_0, \ldots, b_d) T(d)$$

où$T(d)$ est la matrice représentant T. Il en résulte

$$(b_0, \ldots, b_d) = (a_0, \ldots, a_d)(T(d))^{-1} = (a_0, \ldots, a_d) U(d),$$

ce qui conduit à :

$$\underline{b_n = \sum_{q=0,\ldots,n} a_q (-1)^{n-q} \binom{n}{q}, \qquad 0 \leq n \leq d\,.}$$

4.d) Fixons $k \geq 1$ et $d \geq 1$. posons $b_0 = 0$ et $b_q = s_{k,q}$ pour $1 \leq q \leq d$, ainsi que $a_0 = 0$ et $a_n = n^k$, pour $1 \leq n \leq d$. Avec ces conventions, et d'après 3.a)

$$\forall n \in [0, d] \; a_n = \sum_{q=0,\ldots,n} b_q \binom{n}{q}.$$

Le résultat de la question précédente donne

$$\underline{\forall n \in [1, d] \qquad b_n = s_{k,n} = \sum_{q=0,\ldots,n} a_q (-1)^{n-q} \binom{n}{q} = \sum_{q=1,\ldots,n} q^k (-1)^{n-q} \binom{n}{q}\,.}$$

5) Pour tout k $\deg N_k = k$. Les N_k ont des degrés distincts, la famille $(N_0, \ldots, N_d)$ est donc libre. Elle est de longueur $d+1$, qui est la dimension de $\mathbb{R}_d[X]$. $(N_0, \ldots, N_d)$ est par conséquent une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

6) Soit $k > 0$.

— Si $k = 1$, $T(N_k) = X + 1 = X + T(N_{k-1})$ car $N_0 = 1$. Le résultat est vrai.

— Si $k > 1$

$$\begin{aligned}
T(N_k) - T(N_{k-1}) &= \frac{1}{k!}(X+1)\cdot(X+k) - \frac{1}{(k-1)!}(X+1)\cdot(X+k-1) \\
&= \frac{1}{k!}(X+1)\cdot(X+k-1)\,[(X+k)-k] \\
&= \frac{1}{k!}(X+1)\cdot(X+k-1)(X) \\
T(N_k) - T(N_{k-1}) &= N_k
\end{aligned}$$

On a bien prouvé

$$\underline{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad T(N_k) = N_k + T(N_{k-1})\,.}$$

7.a) $T(N_0) = N_0$, $T(N_1) = N_1 + T(N_0)$, $T_(N_2) = N_2 + T(N_1) = N_0 + N_1 + N_2$. On montrer facilement par récurrence

$$T(N_k) = \sum_{q=0}^{k} N_q.$$

On en déduit

$$\underline{\widetilde{T_{k,q}} = 1 \text{ si } k \leq q, \qquad \widetilde{T_{k,q}} = 1 \text{ si } k > q\,.}$$

7.b) On sait que T est bijective. $T(N_0) = N_0$ donc $N_0 = T^{-1}(N_0)$, et pour $k \geq 1$, $T(N_k - N_{k-1}) = N_k$, donc $N_k - N_{k-1} = N_k$. On en déduit :

$$\underline{\widetilde{T^{-1}_{k,q}} = 1 \text{ si } k = q, \qquad \widetilde{T^{-1}_{k,q}} = -1 \text{ si } k = q-1, \qquad \widetilde{T^{-1}_{k,q}} = -1 \text{ sinon.}}$$

8) On a $X^0 = 1 = N_0$. Soit $d \geq 1$.
$(N_0, \ldots, N_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ donc il existe une unique suite $(a_0, \ldots, a_d)$ telle que

$(*)$.
$$X^d = \sum_{q=0}^{d} a_q N_q$$

Les deux membres de cette égalité sont des polynômes de degré d. ils sont égaux si et seulement si ils prennent des valeurs égales en $d+1$ points. $(*)$ est donc équivalente à

$(**)$
$$\forall n \in [0, d] \quad (-n)^d = \sum_{q=0}^{d} a_q N_q(-n).$$

Pour $n = 0$ on obtient $a_0 = 0$ et pour $n \geq 1$

$$(-1)^d n^d = \sum_{q=1}^{n} a_q (-1)^q \binom{n}{q}\,.$$

Or d'après 3.a) ces inégalités sont vérifiées pour $a_q = (-1)^{d-q} s_{d,q}$, donc par unicité

$$\underline{X^0 = N_0 \qquad \text{et,} \qquad \forall d \geq 1 \quad X^d = \sum_{q=1}^{d} (-1)^{d-q} s_{d,q} N_q\,.}$$